

# Affine Abbildungen

---

## \* Achsenspiegelungen \*

### Doppel- und Dreifachspiegelungen

Spezialtext zum Thema *Kongruenzabbildungen*

Stand 31 Juli 2021

Datei Nr. 21212

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

[www.mathe-cd.de](http://www.mathe-cd.de)

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Spiegelung an einer Ursprungsgeraden</b>	<b>4</b>
1.1	Spiegelungen an den Koordinatenachsen	4
1.2	Spiegelung an der Ursprungsgeraden a: $y = mx$	5
	1. Methode: Punktepaare einsetzen	5
	2. Methode: Abbildungsgleichung durch Verkettung	7
	Verwendung trigonometrischer Formeln für genaue Ergebnisse	9
	Spiegelung an $y = 2x$	Seite 5 und Seite 9
	Spiegelung an $y = -\frac{1}{2}x$	Seite 6 und Seite 10
	Spiegelung an $y = \frac{2}{3}x$	Seite 6 und Seite 11
	Spiegelung an x-Achse, y-Achse, $y = x$	Seite 8
1.3	Identifizierung einer Abbildung als Geradenspiegelung (1)	12
B1	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$	13
B2	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$	14
B3	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) & \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$	15
1.4	Spiegelung einer Geraden an einer Achse	16
B4	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$	16
B5	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$	18
<b>2</b>	<b>Spiegelung an einer Nicht-Ursprungsgeraden</b>	<b>20</b>
2.1	Erzeugung der Abbildungsgleichung durch eine Verkettung	20
B6	Spiegelung an $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x + 3$ : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$	21
B7	Spiegelung an $y = -\frac{1}{2}x - 1$ : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$	22
2.2	Identifizierung einer Abbildung als Geradenspiegelung (2)	23
B8	Spiegelung an $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$	23
B9	Spiegelung an $y = 0,721 \cdot x - 2,108$ : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{0,1} & \sqrt{0,9} \\ \sqrt{0,9} & -\sqrt{0,1} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2,775 \end{pmatrix}$	24

<b>3</b>	<b>Gleitspiegelung und Schrägspiegelung</b>	25	
B10	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$	25	
<b>4</b>	<b>Eigenvektoren bei Geradenspiegelungen</b>	26	
B8	Spiegelung an $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$	26
<b>5</b>	<b>Doppelspiegelungen</b>	28	
<b>6</b>	<b>Dreifachspiegelungen</b>	38	
<b>7</b>	<b>Spiegelungsgleichungen mit homogenen Koordinaten</b>	46	

# 1 Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

## 1.1 Spiegelungen an den Koordinatenachsen

### (1) Spiegelung an der x-Achse:

Es gilt:  $x' = x$  und  $y' = -y$ .

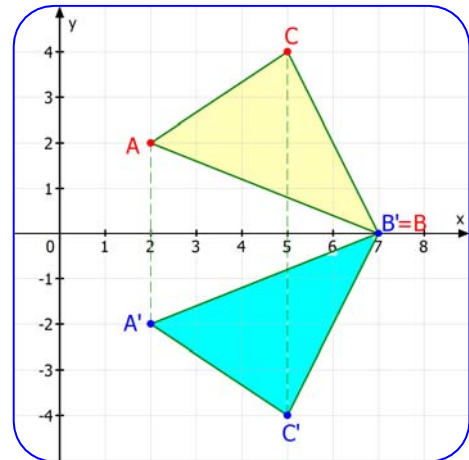
Die x-Koordinate ändert sich nicht,  
die y-Koordinate ändert ihr Vorzeichen.

Die Abbildungsgleichungen kann man so darstellen:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{oder geordnet:} \quad \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{cases}$$

In Vektorschreibweise:  $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

In Matrixschreibweise:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Beispiel: **C(5|4)** soll an der x-Achse gespiegelt werden. Sein Ortsvektor ist  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Bildpunkt:  $\vec{c}' = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Oder:  $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(5|-4)$

B liegt auf der Spiegelachse und ist daher ein Fixpunkt:  $B' = B$

### (2) Spiegelung an der y-Achse:

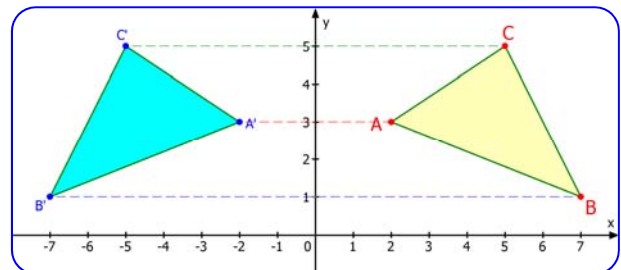
Es gilt:  $y' = y$  und  $x' = -x$

Das Vorzeichen der x-Koordinate ändert sich.  
Die y-Koordinate bleibt unverändert:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$$

Vektorschreibweise:  $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Beispiel: **B(7|1)** soll an der y-Achse gespiegelt werden. Sein Ortsvektor ist  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bildpunkt:  $\vec{b}' = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oder:  $\vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(-7|1)$

### Weitere Beispiele

- a)  $(3|-5) \xrightarrow{\text{Sp.: x-Achse}} (3|5),$       b)  $(-8|3) \xrightarrow{\text{Sp.: x-Achse}} (-8|-3)$   
 c)  $(3|-5) \xrightarrow{\text{Sp.: y-Achse}} (-3|-5)$       d)  $(-8|3) \xrightarrow{\text{Sp.: y-Achse}} (8|3).$

## 1.2 Spiegelungen an der Ursprungsgeraden $a: y = mx$

**Information:** Eine Geradenspiegelung kann man auf verschiedene Arten berechnen:

**1. Möglichkeit:** Durch die Gleichung  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ .  
Man entnimmt der Achsengleichung zwei Paare Punkt/Bildpunkt (aber nicht den Ursprung) zum Einsetzen. Damit berechnet man  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .  
(Man kann diese Vektoren natürlich auch anders bezeichnen.)

**2. Möglichkeit:** Durch die Gleichung  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \vec{x}$ .  
Dabei ist  $\alpha$  der Steigungswinkel, den man aus der Geradensteigung  $m$  so errechnen kann:  $\tan \alpha = m \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$   
Diese Formel wird auf Seite 6 hergeleitet.

### Beispiele zur 1. Methode:

**Beispiel 1:** Bestimme die Gleichung einer Spiegelung an der Geraden  $y = 2x$

Zum Einsetzen verwende ich z. B den Fixpunkt  $F(1|2)$  auf der Achse und den Punkt  $A(-2|1)$  mit seinem Spiegelbild  $A'(1|-2)$ .

**Ansatz:**  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

F einsetzen:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} \quad (1)$

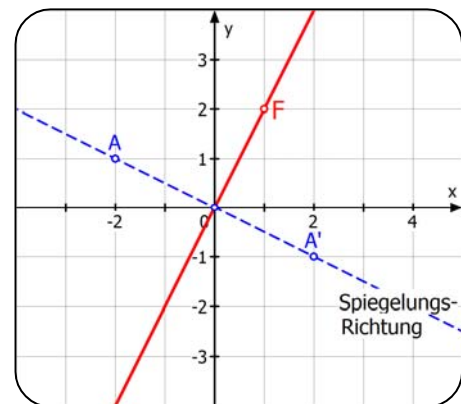
A, A' einsetzen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} \quad (2)$

Elimination von  $\vec{u}$  durch  $2 \cdot (2) + (3)$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{u} + 5 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Einsetzen in (2):  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

**Ergebnis:**  $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$



**Hinweis:** Für eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden verwendet man die Abbildungsgleichungen der Form:  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$ .

Geht die Spiegelachse durch den Ursprung, dann ist  $\vec{w} = \vec{0}$  und die Abbildungsgleichung lautet  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ .

Da ist dann bereits enthalte, dass der Ursprung ein Fixpunkt ist.

Daher kann man diesen nicht mehr zum Einsetzen zur Berechnung von  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  nehmen.

**Beispiel 2: Bestimme die Gleichung einer Spiegelung an der Geraden  $y = -\frac{1}{2}x$** 

Ich verwendet den Fixpunkt  $F(1|2)$  und  
das Punktepaar:  $A(1|2) \rightarrow A'(-1|-2)$ :

**Ansatz:**  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

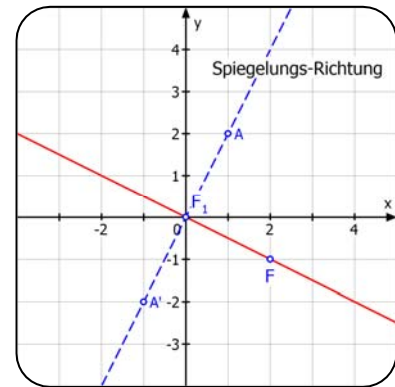
F einsetzen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{v} \quad (1)$

A, A' einsetzen:  $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} \quad (2)$

$2 \cdot (2) + (3)$ :  $5\vec{u} + 0\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

In (2):  $\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

**Ergebnis:**  $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$

**Beispiel 3: Bestimme die Gleichung einer Spiegelung an der Geraden  $y = \frac{2}{3}x$** 

Ich verwendet den Fixpunkt  $F(3|2)$  und  
das Punktepaar:  $A(-2|3) \rightarrow A'(2|-3)$ :

**Ansatz:**  $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

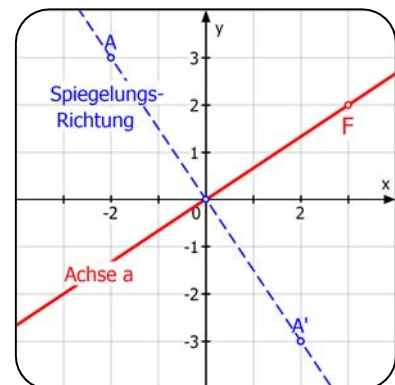
F einsetzen:  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} \quad (1)$

A, A' einsetzen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} \quad (2)$

$2 \cdot (1) + 3 \cdot (2)$ :  $\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = 13 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$

In (1):  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow 3\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ -\frac{10}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{13} \\ \frac{36}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$

**Ergebnis:**  $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \vec{x}$



**Kontrollbeispiel:** Abbildung von  $A(-2|3)$  ergibt  $A'(2|-3)$

$$\vec{x}' = -2 \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} \\ -\frac{24}{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{36}{13} \\ -\frac{15}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{13} \\ -\frac{39}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

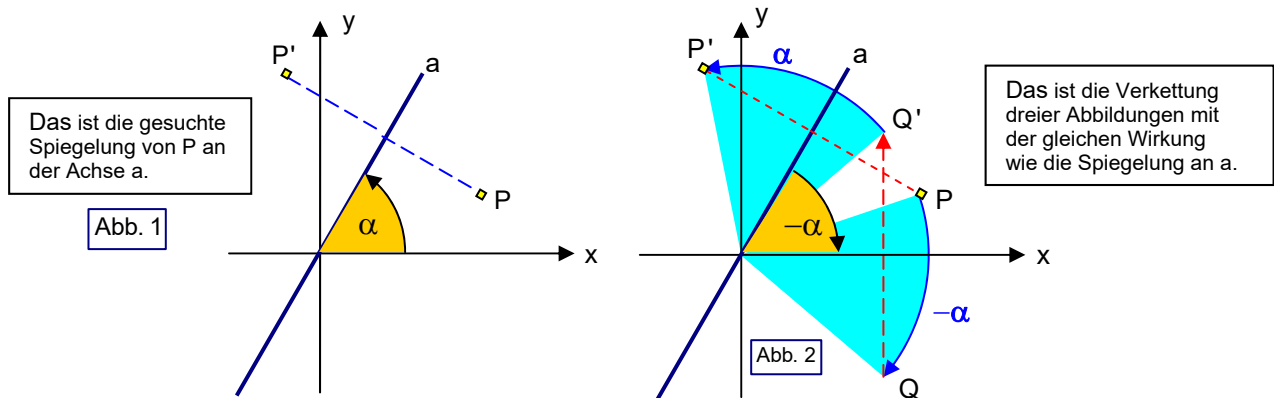
Oder mit der Matrix:  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} + \frac{36}{13} \\ -\frac{24}{13} - \frac{15}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{13} \\ -\frac{39}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

## Beschreibung der 2. Methode:

Die Abbildungsgleichung  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \vec{x}$  entsteht durch eine Verkettung von drei

Abbildungen:

- (1) Man dreht die ganze Anordnung um den Winkel  $-\alpha$ , so dass die Spiegelungsachse auf die x-Achse fällt. Dabei geht der zu spiegelnde Punkt P in Q über.
- (2) Dann spiegelt man Q an der x-Achse nach Q'.
- (3) Dann dreht man Q' um den Winkel  $\alpha$  zurück. (Dabei wird die ursprüngliche Spiegelachse wieder in ihre Anfangslage gebracht).



### Erzeugung der Geradenspiegelung durch Verkettung von drei Abbildungen:

$$P(x | y) \xrightarrow[-\alpha]{\text{Drehung}} Q(u | v) \xrightarrow[\text{an der x-Achse}]{\text{Spiegelung}} Q'(u' | v') \xrightarrow[\alpha]{\text{Rück-Drehung}} P'(x' | y')$$

**1. Schritt:** Drehung von  $P(x | y)$  um O um den Winkel  $-\alpha$  nach  $Q(u | v)$  durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{denn} \quad \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

**2. Schritt:** Spiegelung von  $Q(u | v)$  an der x-Achse nach  $Q'(u' | v') = (u | -v)$ .

$$\begin{pmatrix} u' = u \\ v' = -v \end{pmatrix} \text{ ergibt. } \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**3. Schritt:** (Rück-) Drehung von  $Q'(u' | v')$  um den Winkel  $\alpha$  nach  $P'(x' | y')$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Einsetzen: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Umformung: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

Dies ist die Abbildungsgleichung für eine Spiegelung an g mit dem Steigungswinkel  $\alpha$

*Die Klammern um  $2\alpha$  werden oft weggelassen*

## Anwendungsbeispiele der 2. Methode (Matrix-Methode)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 1 Spiegelung an der x-Achse: Steigungswinkel  $\alpha = 0^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

- 2 Spiegelung an der y-Achse: Steigungswinkel  $\alpha = 90^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

- 3 Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$ : Steigungswinkel  $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

- 4 Spiegelung an der Geraden  $y = 2x$ .

Die Lösung mit dem Einsetzverfahren steht auf Seite 5.

Für die Abbildungsmatrix benötigt man den Steigungswinkel  $\alpha$  sowie  $\sin 2\alpha$  und  $\cos 2\alpha$ .

(a) Die Verwendung eines Taschenrechners liefert eventuell nur Näherungswerte.

Zuerst muss man den Steigungswinkel der Spiegelachse ermitteln. Dazu muss man wissen, dass der Anstieg  $m$  einer Geraden der Tangens des Steigungswinkels ist:  $\tan \alpha = m$  also  $\tan \alpha = 2$ .

Daraus folgt der Winkel durch  $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$

$\tan^{-1} 2$	63.43494882
---------------	-------------

Das Problem liegt für Anfänger darin, dass sie nun mit diesem gerundeten Wert die benötigten Zahlen  $\sin(2\alpha)$  und  $\cos(2\alpha)$  berechnen. Dann erhält man eine ziemlich unbrauchbare Matrix.

Die Lösung des Problems liefert eine Taschenrechnerfunktion „ans“. Sie gibt das zuletzt berechnete Ergebnis aus. Hat man also durch  $\tan^{-1}$  den Steigungswinkel berechnet, dann kann man seine exakte Größe durch „ans“ wieder aufrufen und daraus  $\sin(2\alpha)$  berechnen:

$\tan^{-1} 2$	63.43494882
$\sin(2 \times \text{Ans})$	0.8

Jetzt kennt man den genauen Wert 0,8.

Etwas umständlicher wird es, den exakten zweiten Wert, hier also  $\cos(2\alpha)$  zu berechnen.

Denn jetzt befindet sich nicht mehr der Winkelwert in „ans“ sondern die 0,8. Man kann den

Kosinuswert z. B. mit dem trigonometrischen Pythagoras berechnen:

$$\underbrace{\sin^2(2\alpha)}_{0,8^2} + \cos^2(2\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(2\alpha) = \sqrt{1 - 0,8^2} = \dots = 0,6$$

$\tan^{-1} 2$	63.43494882
$\sin(2 \times \text{Ans})$	0.8
$\sqrt{1 - \text{Ans}^2}$	0.6

Hier fehlt allerdings das negative Vorzeichen, weil diese Rechnung nicht beachtet, dass  $2\alpha$  im 2. Feld liegt und dort die Kosinusfunktion negative Werte liefert.

Ergebnis:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  oder  $\begin{cases} x' = -0,6x + 0,8y \\ y' = 0,8x + 0,6y \end{cases}$



**(b) Zur Berechnung exakter Werte ohne TR verwendet man trigonometrischen Formeln**

Der Trick besteht darin, ohne die Kenntnis von  $\alpha$  direkt die benötigten Zahlen  $\sin(2\alpha)$  und  $\cos(2\alpha)$  zu berechnen. Man benötigt die Kenntnis, dass  $\tan \alpha = m$  ist.

Zur Umrechnung von  $\tan \alpha$  auf  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  gibt es diese Umrechnungsformeln:

$$\sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \pm \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Dann allerdings muss man noch auf den doppelten Winkel umrechnen, und zwar durch

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

**Die Rechnung mit Zahlen:**

Gegeben ist die Spiegelachse  $y = 2x$ . Daraus folgt:  $\tan \alpha = m = 2$  also  $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$

Die Umrechnungsformeln lauten:  $\sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$  und  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

Es folgt  $\sin \alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$  und  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

Da unser Steigungswinkel  $\alpha$  im 1. Feld liegt, kann man  $\pm$  weglassen!

Also folgt:  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  und  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Umrechnung auf den doppelten Winkel:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Ergebnis:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**Tipp für Lehrer:**

Zum Erstellen von Aufgaben sind diese Formeln sehr nützlich. Durch Einsetzen entsteht:

$$\sin(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

Zusammen mit einem CAS-Rechner sind so schnell Aufgaben erstellt.

5 Welche Gleichung hat die Spiegelung an der Geraden a:  $y = -\frac{1}{2}x$

Die Lösung mit dem Einsetzverfahren steht auf Seite 5.

Ansatz:  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

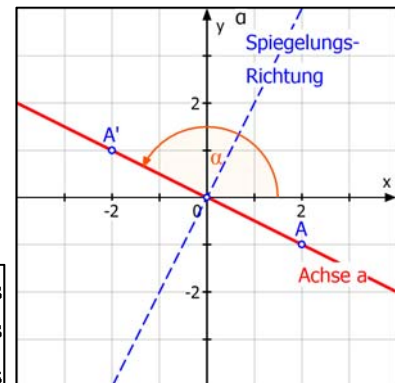
Methode mit Taschenrechner.

Aus  $\tan \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 180^\circ - 26,6^\circ = 133,3^\circ$

folgt:  $\sin 2\alpha = -0,8$

Und  $\cos 2\alpha = -0,6$

$\tan^{-1} -0.5$	-26.56505118
$\sin (2 \times \text{Ans})$	-0.8
$\sqrt{1 - \text{Ans}^2}$	0.6



Methode mit trigonometrischen Formeln:

Die Steigung ist zwar  $\tan \alpha = m = -\frac{1}{2} < 0$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{im 2. Feld positiv})$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{im 2. Feld negativ})$$

Doppelter Winkel:  $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \boxed{-} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = -0,8$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \boxed{-} \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \right) = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Die Vorzeichen ergeben sich hier nicht aus der Rechnung, Sie müssen angefügt werden,

denn  $\sin 266^\circ < 0$  und  $\cos 266^\circ < 0$

Ergebnis:  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

**6** Bestimme die Gleichung einer Spiegelung an der Geraden  $y = \frac{2}{3}x$

Die Lösung mit dem Einsetzverfahren steht auf Seite 5.

$$\text{Ansatz: } \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

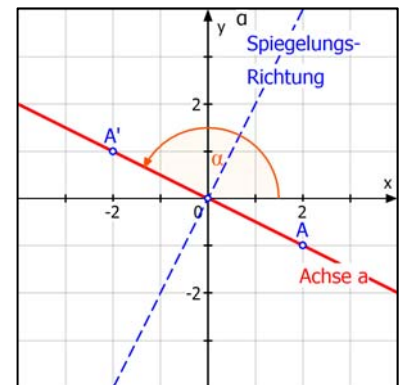
**Methode mit Taschenrechner.**

$$\tan \alpha = m = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33,7^\circ$$

$$\text{folgt: } \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{Und } \cos 2\alpha = \frac{5}{13}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$	33.69006753
$\sin(2 \times \text{Ans})$	$\frac{12}{13}$
$\sqrt{1 - \text{Ans}^2}$	$\frac{5}{13}$



**Mit trigonometrischen Formeln:**

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad (\text{im 1. Feld positiv})$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad (\text{im 1. Feld positiv})$$

$$\text{Doppelter Winkel: } \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{9}{13} - \frac{4}{13}\right) = \frac{5}{13}$$

Ergebnis:

$$\vec{x}' = x \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

### 1.3 Identifizierung einer Abbildung als Geradenspiegelung (1)

Man untersuche diese Merkmale:

- (1) Die Matrix einer Geradenspiegelung hat diese Formen:  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ .

Das heißt: In der Hauptdiagonalen stehen zwei gleiche Zahlen, und die in der Nebendiagonalen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

- (2)  $a$  und  $b$  sind Sinus- bzw. Kosinuswerte und müssen daher Zahlen des Intervalls  $[-1; 1]$  sein.

- (3) Und der trigonometrische Pythagoras muss erfüllt sein:

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{das heißt} \quad \sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) = 1$$

Dann kann man identifizieren:  $a = \cos(2\alpha)$  und  $b = \sin(2\alpha)$ :

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \vec{x}$$

In dieser Form wird an einer Ursprungsgeraden gespiegelt.

## Rechenbeispiele

1

Um was für eine Abbildung handelt es sich bei f:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

**Lösung:** Die Form der Matrix passt zur Geradenspiegelung  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ .

Alle Zahlen sind aus dem Intervall  $[-1; 1]$ , also könnte gelten:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ und } \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \text{ Das passt genau zu } 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ!$$

Der Kenner weiß, dass dies der Steigungswinkel der Spiegelungsachse ist.

Diese hat daher die Steigung  $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  und die Gleichung  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

Man kann die Spiegelungsachse, also die Fixpunktgerade auch berechnen, wenn man keine Winkelberechnung durchgeführt hat:

Fixpunktbedingung:  $\vec{x}' = \vec{x}$

d. h.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Vektorschreibweise:  $x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gleichungssystem: 
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y = x \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y = y \end{cases}$$

Rechts zusammenfassen: 
$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y & | \cdot \sqrt{3} \\ 0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y \\ 0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Beide Gleichungen sind identisch:  $0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y$

Eine Gleichung mit 2 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen:

Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es einen passenden y-Wert.

Das heißt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Stellt man diese Fixpunktgleichung um, erkennt man die Form einer Ursprungsgeraden:

$$\frac{3}{2}y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$$

Sie hat die Steigung  $m = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . Und wegen  $\tan \alpha = m \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Ergebnis: Die gegebene Abbildung ist eine Spiegelung an der Geraden  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$ .

2

Um was für eine Abbildung handelt es sich bei f:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

**Lösung:** Die Form der Matrix passt zur Geradenspiegelung:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Alle Zahlen sind aus dem Intervall  $[-1; 1]$ , also könnte gelten:

$$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4} \text{ und } \sin(2\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{7}.$$

Die Kosinusfunktion hat im 2. und 3. Feld negative Werte. Die Sinusfunktion hat im 1. und 2. Feld positive Werte. Also liegt im 2. Feld die Schnittmenge:

Für den Hilfswinkel  $2\alpha'$  mit  $\sin(2\alpha') = \frac{1}{4}\sqrt{7}$  gilt im 1. Feld:  $2\alpha' \approx 41,41^\circ$ Daraus folgt für das 2. Feld:  $2\alpha = 180^\circ - 2\alpha' = 138,59^\circ$ Und:  $\alpha \approx 69,30^\circ$ 

$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{7}}{4})$	41.40962211
180-Ans	138.5903779
Ans÷2	69.29518895
tan Ans	2.645751311

Der Kenner weiß, dass dies der Steigungswinkel der Spiegelungsachse ist.Diese hat daher die Steigung  $m = \tan 69,30^\circ \approx 2,65$  und die Gleichung  $y = 2,65x$ 

Man kann die Spiegelungsachse, also die Fixpunktgerade, auch berechnen, wenn man keine Winkelberechnung durchgeführt hat:

Fixpunktbedingung:

$$\vec{x}' = \vec{x}$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Vektorschreibweise:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{7}y = x \\ \frac{1}{4}\sqrt{7}x + \frac{3}{4}y = y \end{cases}$$

$$\text{d. h. } \begin{cases} -\frac{7}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{7}y = 0 & | \cdot (-4) \\ \frac{1}{4}\sqrt{7}x - \frac{1}{4}y = 0 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - \sqrt{7} \cdot y = 0 & | : \sqrt{7} \\ \sqrt{7}x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{7}x - y = 0 \\ \sqrt{7}x - y = 0 \end{cases}$$

Beide Gleichungen führen auf  $y = \sqrt{7} \cdot x$  d. h.  $y \approx 2,65 \cdot x$  (siehe oben).

Eine Gleichung mit 2 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen:

Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es einen passenden  $y$ -Wert.

Das heißt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Die Gleichung stellt die Fixpunktgerade, die Spiegelungsachse dar.

**Ergebnis:** Die gegebene Abbildung ist eine Spiegelung an der Geraden  $y = \sqrt{7} \cdot x$ .

3

Um was für eine Abbildung handelt es sich bei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) & \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) & -\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$  ?

**Lösung:** Die Abbildungsmatrix hat die Form einer Spiegelungsmatrix:  $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ .

mit  $\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) > 0$  und  $\sin(2\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Kontrolle: } \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha &= \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16} \cdot [6 - 2\sqrt{12} + 2 + 6 + 2\sqrt{12} + 2] \\ &= \frac{1}{16} \cdot 16 = 1 \end{aligned}$$

Man erhält den Winkel  $2\alpha$  im 1. Feld:  $2\alpha = 75^\circ \Rightarrow \alpha = 37,5^\circ$ .

$$\begin{array}{l} \sin^{-1}((\sqrt{6}+\sqrt{2})\div 4) \quad 75 \\ \tan(\text{Ans}\div 2) \quad 0.767326988 \end{array}$$

Daraus folgt für die Spiegelungsachse:  $m = \tan 37,5^\circ \approx 0,767$

Sie hat also die Gleichung:

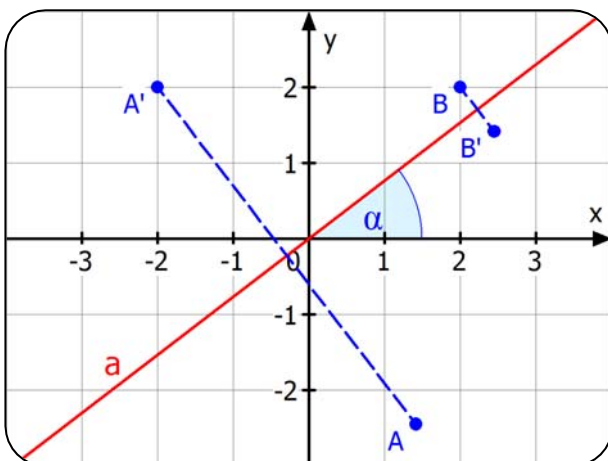
$$y \approx 0,767x$$

Spiegelung zweier Punkte:

$$A(\sqrt{2} \mid -\sqrt{6}) \rightarrow A'(-2 \mid 2)$$

$$B(2 \mid 2) \rightarrow B'(\sqrt{6} \mid \sqrt{2})$$

Berechnung mit CAS:



Edit Aktion Interaktiv

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+\sqrt{2} & -\sqrt{6}+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(\sqrt{6} \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}))}{4} \\ \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \end{bmatrix}$$
 simplify (ans)  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+\sqrt{2} & -\sqrt{6}+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + 2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \\ \frac{2 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \end{bmatrix}$$
 simplify (ans)  $\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Algeb Standard Reell 360°

## 1.4 Spiegelung einer Geraden an einer Achse

### Beispiel 4

Spiegle  $A(-3 | 4)$  und  $B(1 | -3)$  an der Geraden  $y = 2x$ .  
 Konstruiere die Bildpunkte und berechne deren Koordinaten.  
 Zeichne die Gerade  $g = (AB)$  ein, sowie deren Bildgerade  $g'$ .  
 Welche Gleichungen haben  $g$  und  $g'$ ?

**Lösung:** Auf Seite 7 wurde hergeleitet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bildpunkt von  $A(-3 | 4)$ :

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 + 3,2 \\ -2,4 + 2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also:  $A'(5 | 0)$

Bildpunkt von  $B(1 | -3)$ :

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 - 2,4 \\ 0,8 - 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also:  $B'(-3 | -1)$

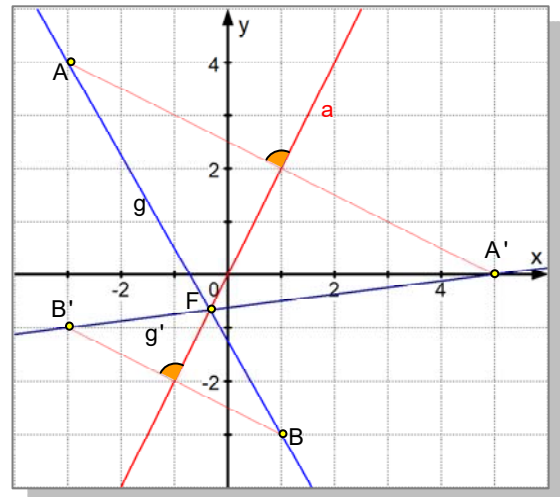
**Gleichung von  $g$ :** Steigung

Punkt-Steigungs-Form:

Ergebnis:

**Gleichung von  $g'$ :** Steigung

Punkt-Steigungs-Form:



$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - 4}{1 + 3} = -\frac{7}{4}$$

$$y - 4 = -\frac{7}{4}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{7}{4}x - \frac{21}{4} + 4$$

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$m_{g'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-1)}{5 - (-3)} = \frac{1}{8}$$

$$y - 0 = \frac{1}{8}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{5}{8}$$

**Achtung:** Man kann die Gleichung von  $g'$  direkt aus der Gleichung von  $g$  berechnen. Dazu muss man die Abbildungsgleichung nach  $x$  und  $y$  umstellen und einsetzen:

Zur Berechnung eines Bildpunktes aus dem Urbild verwendet man  $\begin{cases} x' = -0,6x + 0,8y \\ y' = 0,8x + 0,6y \end{cases}$ .

Da man mit derselben Spiegelung aber auch wieder zum Urbild zurückfindet, gilt für die

Berechnung des Urbildes aus dem Bildpunkt analog:  $\begin{cases} x = -0,6x' + 0,8y' \\ y = 0,8x' + 0,6y' \end{cases}$

**Wir verwenden diese Gleichungen zum Einsetzen in die Gleichung von  $g$ :**

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{Spiegelung}} 0,8x' + 0,6y' = -\frac{7}{4} \cdot (-0,6x' + 0,8y') - \frac{5}{4} \quad | \cdot 4$$

$$: \quad 3,2x' + 2,4y' = 4,2x' - 5,6y' - 5 \Leftrightarrow 8y' = x' - 5$$

Daraus folgt  $g'$ :  $y' = \frac{1}{8}x' - \frac{5}{8}$



## Für Interessierte:

## Berechnung der Bildgeraden mit dem CAS-Rechner TI Nspire

$\text{solve}\left(\begin{cases} x' = -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y \\ y' = 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y \end{cases}, \{x, y\}\right)$	"Fehler: Argument muss Variablenname sein."
$\text{solve}\left(\begin{cases} a = -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y \\ b = 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y \end{cases}, \{x, y\}\right)$	$x = -0.6 \cdot (a - 1.33333 \cdot b)$ and $y = 0.8 \cdot (a + 0.75 \cdot b)$
$\text{solve}\left(\begin{cases} a = -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y \\ b = 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y \end{cases}, \{x, y\}\right)$	$x = \frac{-(3 \cdot a - 4 \cdot b)}{5}$ and $y = \frac{4 \cdot a + 3 \cdot b}{5}$
$y = \frac{-7}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \mid x = \frac{-(3 \cdot a - 4 \cdot b)}{5}$ and $y = \frac{4 \cdot a + 3 \cdot b}{5}$	$\frac{4 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{21 \cdot a}{20} - \frac{7 \cdot b}{5} - \frac{5}{4}$
$\text{solve}\left(\frac{4 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{21 \cdot a}{20} - \frac{7 \cdot b}{5} - \frac{5}{4}, b\right)$	$b = \frac{a - 5}{8}$

## Erklärungen:

Diese Berechnung eines Anfängers zeigt, wie man es eigentlich nicht machen sollte.

1. Zeile: Der Versuch, die Abbildungsgleichungen in dieser Form einzugeben scheitert, offenbar akzeptiert Nspire  $x'$  und  $y'$  nicht.
2. Zeile: Ich verwende  $a$  statt  $x'$  und  $b$  statt  $y'$ . Die Umstellung gelingt.
3. Zeile: Um Brüche statt Dezimalzahlen zu erhalten ändere ich die **Voreinstellung auf „Exakt“**.
4. Zeile: Einsetzen der umgestellten Abbildungsgleichungen in die Geradengleichung. Hinter den Bedingungsstrich schreibe ich Ans, d. h. die letzte Antwort soll verwendet werden. Man erhält nun die Geradengleichung mit  $b$  und  $a$ .
5. Zeile. Diese Gleichung wird nun nach  $b$  (an Stelle von  $y'$ ) umgestellt. Das Ergebnis lautet:  $y' = \frac{1}{8}x' - \frac{5}{8}$ .

Die Lösung eines „Könners“ ist kürzer. Er weiß, dass die Spiegelungsgleichungen auch für die Umkehrung verwendbar sind, also nicht – wie in der 3. Zeile – erst berechnet werden müssen. Die Bildpunkte werden mit  $P'(a | b)$  bezeichnet.

© Abbildungsgleichungen in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = \frac{-7}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \mid x = -0.6 \cdot a + 0.8 \cdot b \text{ and } y = 0.8 \cdot a + 0.6 \cdot b \quad 0.8 \cdot a + 0.6 \cdot b = 1.05 \cdot a - 1.4 \cdot b - \frac{5}{4}$$

$$\text{solve}\left(0.8 \cdot a + 0.6 \cdot b = 1.05 \cdot a - 1.4 \cdot b - \frac{5}{4}, b\right) \quad b = \frac{a - 5}{8} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{8}x' - \frac{5}{8}$$

## Eine zweite Methode verwendet die Abbildungsmatrix:

1. Zeile: Man bildet den beliebigen Geradenpunkt  $P(x \mid -\frac{7}{4}x - \frac{5}{4})$  ab. Der Bildpunkt heißt  $P'(a | b)$ .
2. Zeile:  $a = -2x - 1$  wird nach  $x$  umgestellt.
3. Zeile: Damit wird  $x$  in  $b = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$  ersetzt. Das Ergebnis ist  $y' = \frac{1}{8}x' - \frac{5}{8}$ .

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ -\frac{7}{4}x - \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a = -2 \cdot x - 1 \\ b = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(a = -2 \cdot x - 1, x) \quad x = \frac{-(a+1)}{2}$$

$$b = \frac{-1}{4} \cdot x - \frac{3}{4} \mid x = \frac{-(a+1)}{2} \quad b = \frac{a}{8} - \frac{5}{8}$$

**Beispiel 5**

Die Achse  $a$  schlieÙe mit der  $x$ -Achse  $30^\circ$  ein und geht durch den Ursprung. Berechne ihre Gleichung. Dann werden die Punkte  $A(4|0)$  und  $B(-2|2)$  sowie die Gerade  $g = (AB)$  an der Achse  $a$  gespiegelt. Berechne die Koordinaten von  $A'$  und  $B'$  sowie die Gleichung der Bildgeraden  $g'$  sowohl aus  $A'$  und  $B'$ , wie auch direkt aus der Gleichung von  $g$ .

**Lösung:**

Die Ursprungsgerade mit dem Steigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  hat die Steigung  $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  und daher die Gleichung

$$a: \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$$

**Spiegelung an  $a$ :**

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{Spiegelung von } A(4|0): \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Bildpunkt: } A'(2|2\sqrt{3}) \approx (2|3,46)$$

$$\text{Spiegelung von } B(-2|2): \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bildpunkt: } B'(\sqrt{3}-1|-\sqrt{3}-1) \approx (0,73|-2,73)$$

$$\text{Gleichung der Geraden } g = (AB): \quad m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

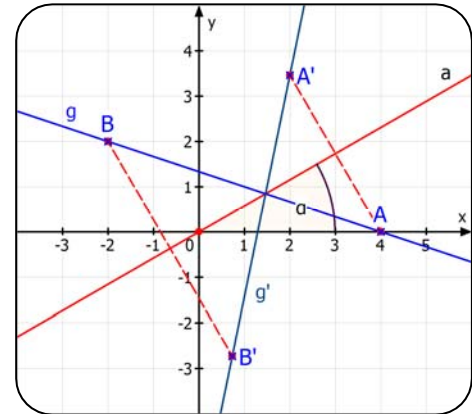
$$\text{Punkt-Steigungsform: } y-0 = -\frac{1}{3}(x-4) \Leftrightarrow g: y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

**Gleichung der Geraden  $g' = (A'B')$ :**

$$m_{g'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{3} - (-\sqrt{3}-1)}{2 - (\sqrt{3}-1)} = \frac{3\sqrt{3}+1}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}+9+3+\sqrt{3}}{9-3} = \frac{10\sqrt{3}+12}{6} = \frac{5}{3}\sqrt{3}+2$$

$$\text{Punkt-Steigungsform: } y'-2\sqrt{3} = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3}+2\right) \cdot (x'-2) \Leftrightarrow$$

$$\text{Bildgerade: } g': y' = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3}+2\right) \cdot x' - \frac{4}{3}\sqrt{3} - 4$$



Die Darstellung zeigt, dass sich  $g$  und  $g'$  auf der Achse  $a$  schneiden. Das ist immer so, denn die Achse besteht aus lauter Fixpunkten (Achse = Fixpunktgerade). Daher wird dieser Schnittpunkt bei der Spiegelung an  $a$  auf sich abgebildet. Also muss auch die Bildgerade durch ihn gehen.

Nun lösen wir die Aufgabe so, dass wir die Gleichung der Geraden  $g$  mit Hilfe der Abbildungsgleichungen berechnen.

Man muss die Abbildungsgleichungen nach  $x$  und  $y$  umstellen, also die Gleichungen der Umkehrabbildung berechnen. Da sich eine Spiegelung quasi selbst umkehrt (zweimal an  $a$  spiegeln führt wieder zum Urbild zurück), muss man nur die Bezeichnungen ändern und muss nichts rechnen:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot y \\ y' = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{bzw. umgekehrt: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot y' \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

Diese beiden (roten) Gleichungen setzt man also in die Gleichung von  $g$  ein:

g:  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$  geht über in  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x' - \frac{1}{2}y' = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot y'\right) + \frac{4}{3}$

Umformen:  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x' - \frac{1}{2}y' = -\frac{1}{6}x' - \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot y' + \frac{4}{3}$

Brüche weg:  $\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot y' - \frac{1}{2}y' = -\frac{1}{6}x' - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x' + \frac{4}{3} \quad | \cdot 6$

Zusammenfassen:  $\sqrt{3} \cdot y' - 3y' = -x' - 3\sqrt{3} \cdot x' + 8$

$(\sqrt{3} - 3)y' = -(1 + 3\sqrt{3}) \cdot x' + 8 \quad | :(\sqrt{3} - 3)$

$y' = -\frac{(1 + 3\sqrt{3})}{(\sqrt{3} - 3)} \cdot x' + \frac{8}{(\sqrt{3} - 3)}$

Nenner rational machen:  $y' = -\frac{(1 + 3\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3} - 3) \cdot (\sqrt{3} + 3)} \cdot x' + \frac{8 \cdot (\sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3} - 3) \cdot (\sqrt{3} + 3)}$

$y' = -\frac{\sqrt{3} + 3 + 9 + 9\sqrt{3}}{3 - 9} x' + \frac{8\sqrt{3} + 24}{3 - 9}$

$y' = \frac{10\sqrt{3} + 12}{6} x' + \frac{8\sqrt{3} + 24}{-6}$

Ergebnis: g':  $y' = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3} + 2\right)x' - \frac{4}{3}\sqrt{3} - 4$

### Berechnung der Bildgeraden mit einem CAS-Rechner CASIO ClassPad II:

Erklärungen:

1. Zeile: Hinter die Geradengleichung setzt man den Bedingungsstrich | und schreibt dahinter die angepassten Spiegelungsgleichungen.
  2. Zeile: Das Ergebnis wird nach b umgestellt.
  3. Zeile: Simplify vereinfacht nur wenig.
  4. Zeile: Mit expand trennt man.
- Ergebnis: g':  $y' = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3} + 2\right)x' - \frac{4}{3}\sqrt{3} - 4$

Edit Aktion Interaktiv  
 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad | \quad x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{3}b \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}a - \frac{1}{2}b$   
 $\frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} - \frac{b}{2} = -\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot b}{2}\right) + \frac{4}{3}$   
 Solve (Ans, b)  
 $\left\{ b = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a + a - 8}{-\sqrt{3} + 3} \right\}$   
 Simplify (ans)  
 $\left\{ b = \frac{(3 \cdot \sqrt{3} \cdot a + a - 8) \cdot (\sqrt{3} + 3)}{6} \right\}$   
 expand (ans)  
 $\left\{ b = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot a}{3} + 2 \cdot a - \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} - 4 \right\}$

## 2 Spiegelung an einer Nicht-Ursprungsgeraden

### 2.1 Erzeugung der Abbildungsgleichung durch eine Verkettung

**Beispiel 6** Spiegelachse:  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x + 3$

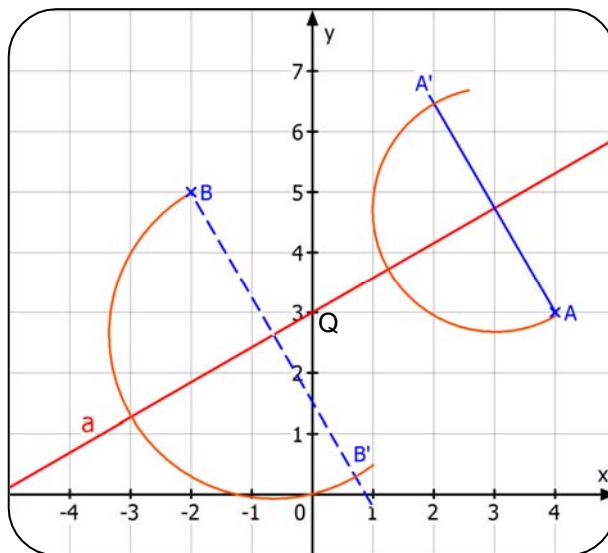


Abb. 1

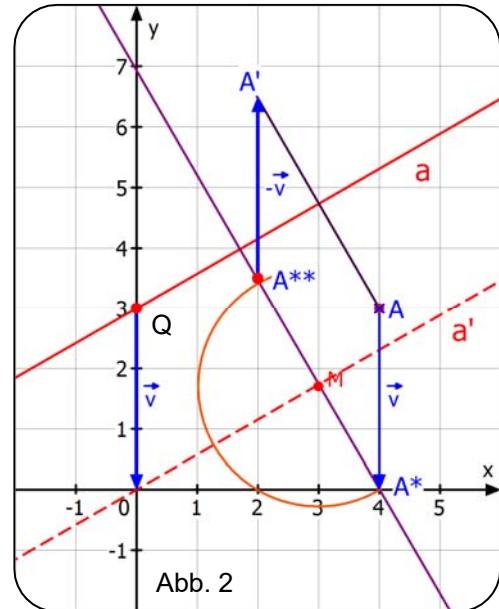


Abb. 2

**Abbildung 1** stellt eine Spiegelung an der Geraden  $a: y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x + 3$  dar, ausgeführt für die Punkte  $A(4|3)$  und  $B(-2|5)$ . Die Gerade kann man wie folgt zeichnen: Ihre Steigung ist  $m = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan \alpha$ . Also ist der Steigungswinkel  $30^\circ$ , und sie geht durch  $Q(0|3)$ .

**Abbildung 2** ersetzt diese Spiegelung durch folgende drei Abbildungen:

Zuerst führt man die Abbildung  $f$  aus, die  $Q$  in den Ursprung verschiebt. Dadurch entsteht eine neue Achse  $a^*$ :  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$ . Nach der Spiegelung  $g$  an  $a^*$  macht man die anfängliche Verschiebung wieder rückgängig:

$$A \xrightarrow[\text{Q nach O}]{\text{Verschiebung}} A^* \xrightarrow[\text{an } a^*]{\text{Spiegelung}} A^{**} \xrightarrow[\text{O nach Q}]{\text{Rückverschiebung}} A'$$

Dazu die Rechnungen:

**1. Abbildung: Verschiebung:**  $P(x|y) \rightarrow P^*(x^*|y^*)$  mit  $\vec{x}^* = \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

**2. Abbildung: Spiegelung an  $a^*$ :**

Der Neigungswinkel von  $a^*$  ist  $30^\circ$ , denn  $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ .

$$\text{Drehmatrix: } \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Abbildungsgleichung: } \vec{x}^{**} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}^*$$

**3. Abbildung: Rückverschiebung:**  $P^{**}(x^{**}|y^{**}) \rightarrow P'(x'|y')$  mit  $\vec{x}' = \vec{x}^{**} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Man setzt nun die Gleichungen ineinander ein:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x}^{**} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \bar{x}^{**} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{x}^* &= \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{x}' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[ \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \quad \bar{x}' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \quad \bar{x}' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### BEOBACHTUNG:

Die Spiegelung an der Ursprungsgeraden  $a^*$ :  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$  hat die Abbildungsgleichung

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x}$$

Die Spiegelung an der Geraden  $a^*$ :  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x + 3$  hat die Abbildungsgleichung

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

**Erkenntnis:** Geht die Spiegelachse nicht durch den Ursprung, dann enthält die Abbildungsgleichung einen Verschiebungsvektor!

**Damit erhält man eine verkürzte Herleitung der Abbildungsgleichung:**

Man stellt zuerst die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

auf und addiert einen unbekanntem Verschiebungsvektor, also:  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \vec{v}$ .

Dann bildet man einen Fixpunkt der Achse ab: Z. B.  $Q(0|3) = Q'$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}} + \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Anwendung:

$$\text{Bildpunkt von } A(4|3): \bar{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}$$

$$A'(2|2\sqrt{3}+3)$$

$$\text{Bildpunkt von } B(-2|5): \bar{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B'(\sqrt{3}-1|2-\sqrt{3})$$

### Beispiel 7: Spiegelachse $y = -\frac{1}{2}x - 1$

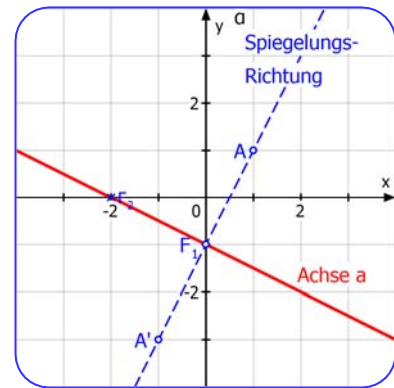
Ich zeige hier einen **Ansatz** ohne Matrix:

$$\bar{x}' = x \cdot \bar{u} + y \cdot \bar{v} + \bar{w}$$

Zur Bestimmung von  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  verwende ich

die Fixpunkte  $F_1(0 | -1)$  und  $F_2(-2 | 0)$

sowie das Punktepaar:  $A(1|1) \rightarrow A'(-1|-3)$ :



$$F_1 \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \bar{u} - 1 \cdot \bar{v} + \bar{w} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v} = \bar{w} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$F_2 \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \bar{u} - 0 \cdot \bar{v} + \bar{w} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u} = \frac{1}{2} \bar{w} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A, A' \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} + \bar{w} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w} \quad (3)$$

$$(1) \text{ und } (2) \text{ in } (3) \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \bar{w} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{w} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \bar{w}$$

$$\text{Daraus erhalt man} \quad \frac{5}{2} \bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{w} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ -1,6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} \text{ in } (1): \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ -1,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} \text{ in } (2): \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ergebnis: } \bar{x}' = x \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

## 2.2 Identifizierung einer Abbildung als Geradenspiegelung (2)

**Beispiel 8:** Untersuche, welche Abbildung durch die Gleichung  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$  dargestellt wird.

**Lösung:** Die Form der Matrix passt zur Geradenspiegelung:  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

Alle Zahlen sind aus dem Intervall  $[-1; 1]$ , also könnte gelten:

$$\cos(2\alpha) = 0,6 \text{ und } \sin(2\alpha) = 0,8.$$

$$\text{Die Kontrolle stimmt auch: } a^2 + b^2 = 0,36 + 0,64 = 1$$

### Bestimmung der Fixgeraden:

Bedingung:  $\bar{x}' = \bar{x}$  d. h.  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

In Vektorschreibweise:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem:  $\begin{cases} x = 0,6x + 0,8y + 1,2 \\ y = 0,8x - 0,6y - 2,4 \end{cases}$

Links ordnen:  $\begin{cases} 0,4x - 0,8y = 1,2 & |:0,4 \\ -0,8x + 1,6y = -2,4 & |:(-0,8) \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen sind identisch. Also gibt es unendlich viele Fixpunkt, die alle diese Gleichung lösen.

Fixpunktgerade (Achse) ist:  $x - 2y = 3$  bzw.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Ergebnis: Die gegebene Abbildung ist eine Geradenspiegelung.

**Beispiel 9:**

Untersuche, welche Abbildung durch  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{0,1} & \sqrt{0,9} \\ \sqrt{0,9} & -\sqrt{0,1} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2,775 \end{pmatrix}$  dargestellt wird. (Info: Die Zahl -2,775 ist gerundet, also eine Näherungszahl)

**Lösung:**

Die Form der Matrix passt zur Geradenspiegelung:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Alle Zahlen sind aus dem Intervall  $[-1; 1]$ , also könnte gelten:

$$\cos(2\alpha) = \sqrt{0,1} \quad \text{und} \quad \sin(2\alpha) = \sqrt{0,9}.$$

Die Kontrolle stimmt auch:  $a^2 + b^2 = 0,1 + 0,9 = 1$

**Bestimmung der Fixgerade:**

Bedingung:  $\vec{x}' = \vec{x}$  d. h.  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{0,1} & \sqrt{0,9} \\ \sqrt{0,9} & -\sqrt{0,1} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2,775 \end{pmatrix}$

In Vektorschreibweise:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{0,1} \\ \sqrt{0,9} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{0,9} \\ -\sqrt{0,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2,775 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: 
$$\begin{cases} x = x\sqrt{0,1} + y\sqrt{0,9} + 2 \\ y = x\sqrt{0,9} - y\sqrt{0,1} - 2,775 \end{cases}$$

Links ordnen: 
$$\begin{cases} x(1 - \sqrt{0,1}) - y\sqrt{0,9} = 2 & | \cdot (-\sqrt{0,9}) \\ -x\sqrt{0,9} + y(1 + \sqrt{0,1}) = -2,775 & | \cdot (1 - \sqrt{0,1}) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x(1 - \sqrt{0,1}) \cdot \sqrt{0,9} + y\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{0,9} = -2 \cdot \sqrt{0,9} \\ -x\sqrt{0,9} \cdot (1 - \sqrt{0,1}) + y(1 + \sqrt{0,1})(1 - \sqrt{0,1}) = -2,775 \cdot (1 - \sqrt{0,1}) \end{cases}$$

$1^2 - \sqrt{0,1}^2 = 1 - 0,1 = 0,9$

$$\begin{cases} -x \cdot (\sqrt{0,9} - \sqrt{0,09}) + y \cdot 0,9 = -2\sqrt{0,9} \approx -1,897 & (3) \\ -x \cdot (\sqrt{0,9} - \sqrt{0,09}) + y \cdot 0,9 = -2,775(1 - \sqrt{0,1}) \approx -1,892 & (4) \end{cases}$$

Damit sind beide Gleichungen (nahezu) identisch.

Also stellt jede Gleichung die Fixpunktgerade (Achse) dar.

$$0,9 \cdot y = (\sqrt{0,9} - 0,3) \cdot y - 1,897$$

$$y = \frac{\sqrt{0,9} - 0,3}{0,9} \cdot x - \frac{1,897}{0,9}$$

d. h.  $y = 0,721 \cdot x - 2,108$



### 3 Gleitspiegelung und Schrägspiegelung

Diese beiden Arten von affinen Abbildungen gehören nicht zu dem, was man populär als Geradenspiegelung bezeichnet.

Die bisher behandelte „Geradenspiegelung“ ist eine **orthogonale Spiegelung**, denn die Spiegelungsrichtung ist orthogonale (senkrecht) zur Achse.

Eine **Schrägspiegelung** wird so definiert, dass die Abbildungsrichtung schräg zur Achse ist, und dann aber der gleiche Abstand übertragen wird.

**Beispiel 10:** 
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

Die Fixpunktbedingung  $\vec{x}' = \vec{x}$  ergibt: 
$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{3}{5} = x \\ \frac{16}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{24}{5} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5} & (1) \\ \frac{16}{5}x - \frac{8}{5}y = \frac{24}{5} & (2) \end{cases}$$

Da Gleichung (2) das (-8)-fache von (1) ist, ist (2) überflüssig. Es bleibt also nur (1) als Bedingung für Fixpunkte. Das heißt: Alle Punkte, die die Gleichung  $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5}$  erfüllen, sind Fixpunkte. Durch Umformen kommt man auf  $y = 2x - 3$ .

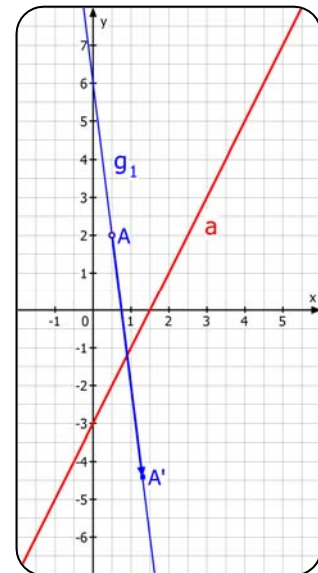
Das ist die **Fixpunktgerade (Achse)**.

Die Spiegelungsrichtung hat die Steigung -8.

Die Abbildung zeigt die Schrägspiegelung

Des Punktes  $A(\frac{1}{2} | 2)$  an der Achse a.

*Achtung: Eine Schrägspiegelung ist keine Kongruenzabbildung.*



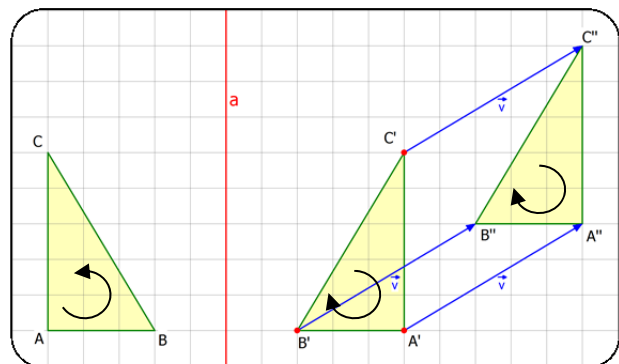
**Dagegen ist eine Gleitspiegelung eine Kongruenzabbildung.**

Man kann sie zum Beispiel durch Verkettung einer Spiegelung mit einer Verschiebung erzielen, oder durch eine Verkettung einer Drehung mit einer Spiegelung.

Ihre Abbildungsgleichung hat die Form

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

wobei die Determinante der Matrix den Wert -1 ist und keine Fixpunkte vorhanden sind.



Siehe Text 21213.

#### 4 Eigenvektoren bei Geradenspiegelungen (ausführlich im Text 21201)

Auf Seite 23 wurde die Geradenspiegelung  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$  untersucht.

Wichtig ist die Berechnung der sogenannten Eigenvektoren. Darunter versteht man die Vektoren, deren Bild ein Vielfaches des Urbilds ist. Die Bedingung dazu lautet:

$$\bar{u}' = k \cdot \bar{u}, \text{ also } A \cdot \bar{u} = k \cdot \bar{u}$$

Daraus entsteht ein Gleichungssystem für die **Eigenwerte**  $k$ , das Eigenwertsystem.

Ausführlich:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,6 \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = k \cdot u_1 \\ 0,8 \cdot u_1 - 0,6 \cdot u_2 = k \cdot u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,6 - k) \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = 0 \\ 0,8 \cdot u_1 + (-0,6 - k) \cdot u_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Mit Matrizenrechnung:

$$A \cdot \bar{u} = k \cdot E \cdot \bar{u} \quad *)$$

$$A \cdot \bar{u} - k \cdot E \cdot \bar{u} = \vec{0}$$

$$(A - k \cdot E) \cdot \bar{u} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0,6 - k & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 - k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k$  soll nun so bestimmt werden, dass das Gleichungssystem auch nicht-triviale Lösungen hat.

Dazu muss die Determinante 0 werden. Dann entsteht die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$\det(A - k \cdot E) = 0$$

$$\text{d. h.} \quad \begin{vmatrix} 0,6 - k & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 - k \end{vmatrix} = 0$$

$$(0,6 - k)(-0,6 - k) - 0,64 = 0$$

$$\text{Charakteristische Gleichung: } k^2 - 0,36 - 0,64 = 0$$

$$k^2 = 1 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$$

Die Matrix  $M$  hat also die **Eigenwerte**:  $k_1 = 1$  und  $k_2 = 0,5$ .

Man kann jetzt zu jedem Eigenwert die **Eigenvektoren berechnen**:

$$\text{Zu } k_1 = 1 \text{ lautet (1): } \begin{cases} -0,4 \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = 0 \\ 0,8 \cdot u_1 - 1,2 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

Eine Gleichung ist entbehrlich. Beide führen auf  $u_1 = 2u_2$ :

Wählt man  $u_2 = 1$ , folgt  $u_1 = 2$  und wir haben den 1. Eigenvektor:  $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $\bar{u}_1' = \bar{u}_1$

$$\text{Zu } k_2 = -1 \text{ lautet (1): } \begin{cases} 1,6 \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = 0 \\ 0,8 \cdot u_1 + 0,4 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

Eine Gleichung ist entbehrlich. Beide führen auf  $u_2 = -2u_1$ :

Wählt man  $u_1 = 1$ , folgt  $u_2 = -2$  und wir haben den 2. Eigenvektor:  $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  mit  $\bar{u}_2' = -\bar{u}_2$ .

Interpretation. Der Eigenvektor  $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit dem Eigenwert 1 gehört zur Achse.

Der Eigenvektor  $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  mit dem Eigenwert -1 gehört zur Abbildungsrichtung.

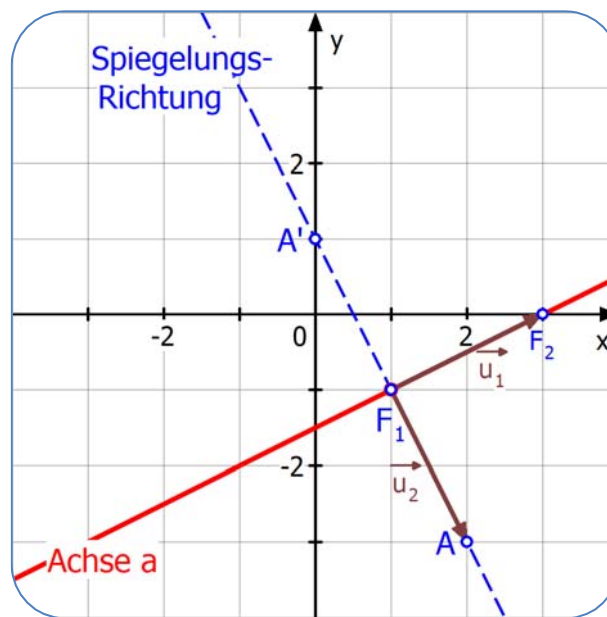
Die Abbildung verdeutlicht das:

$$\overline{F_1 F_2} = \vec{u}_1 \rightarrow \vec{u}_1' = \vec{u}_1 = \overline{F_1 F_2} \quad \text{Punkte der Achse sind Fixpunkte.}$$

$$\overline{F_1 A} = \vec{u}_2 \rightarrow \vec{u}_2' = -\vec{u}_2 = \overline{F_1 A'} \quad \text{A wird nach A' gespiegelt.}$$

(Achtung bitte, man sollte den Punkt A nicht mit der Matrix A verwechseln. Ich hätte andere Buchstaben verwenden sollen .....)

Das heißt: Jeder Vektor in Achsenrichtung ist ein Fixvektor, und jeder Vektor in Spiegelungsrichtung wird umgekehrt.



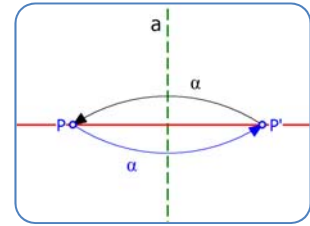
## 5 Doppelspiegelungen

Eine Doppelspiegelung soll eine Verkettung zweier Achsen Spiegelungen sein.

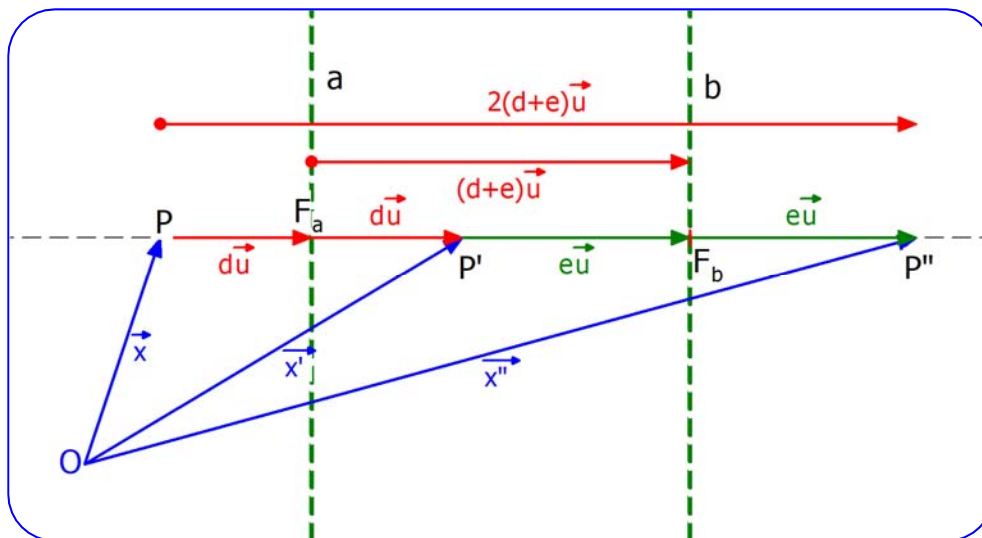
### 1. Fall: Die beiden Spiegelungsachsen sind identisch.

Die Doppelspiegelung ist dann die identische Abbildung:

$$\alpha_g \circ \alpha_g = \text{id}: P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\alpha} P$$



### 2. Fall: Die beiden Spiegelungsachsen sind parallel.



P wird der Reihe nach an a und b gespiegelt. A und b sind parallele Geraden.

Die Spiegelungsrichtung ist also orthogonal zu a und b.

Der Vektor  $\vec{u}$  sei der Einheitsvektor in Spiegelungsrichtung.

Wenn der abzubildende Punkt P von a den Abstand d hat, dann ist  $\overline{PF_a} = d \cdot \vec{u}$

Für das Spiegelbild P' ergibt sich damit der Ortsvektor  $\vec{x}' = \vec{x} + 2d \cdot \vec{u}$

Wenn dieser Punkt P' von b den Abstand e hat, dann ist  $\overline{P'F_b} = e \cdot \vec{u}$ .

Für das Spiegelbild P'' ergibt sich damit der Ortsvektor  $\vec{x}'' = \vec{x}' + 2e \cdot \vec{u}$

bzw. 
$$\vec{x}'' = \vec{x} + 2d \cdot \vec{u} + 2e \cdot \vec{u} = 2(d+e) \cdot \vec{u}$$

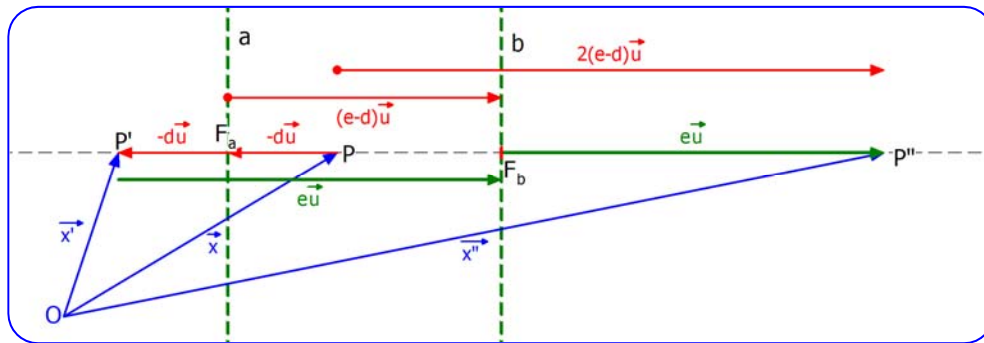
Das bedeutet aber, dass man P'' aus P durch eine Verschiebung erhält.

Der Verschiebungsvektor ist  $\overline{PP''} = 2(d+e) \vec{x}$ .

Weil  $d+e = c$  der Abstand der parallelen Achsen ist, kann man sagen:

Eine Doppelspiegelung an parallelen Achsen ist gleichwertig einer Verschiebung senkrecht zu den Achsen um den doppelten Abstand der beiden Achsen.

Es gibt nun auch andere Lagen von P zu den Achsen. Ich zeige exemplarisch an einem weiteren Fall, dass dieses Ergebnis allgemeingültig ist.



Jetzt liegt O zwischen den Achsen.  $\vec{u}$  sei der Einheitsvektor, der von P auf b zeigt.

Dann gilt:  $\overrightarrow{PF_a} = d \cdot (-\vec{u}) = -d\vec{u}$  wenn d der Abstand P-a ist.

Also kann man den Ortsvektor des Bildpunktes P' so berechnen:  $\vec{x}' = \vec{x} - 2d\vec{u}$

und es gilt:  $\overrightarrow{P'F_b} = e \cdot \vec{u}$  wenn e der Abstand P'-b ist.

Also kann man den Ortsvektor des Bildpunktes P'' so berechnen:  $\vec{x}'' = \vec{x}' + 2e\vec{u}$ .

Setzt man diese Gleichungen zusammen, erhält man

$$\vec{x}'' = \vec{x} + 2e\vec{u} - 2d\vec{u} = \vec{x} + 2(e-d)\vec{u}$$

Weil  $e-d = c$  der Abstand der parallelen Achsen ist, kann man sagen:

**Diese Doppelspiegelung an parallelen Achsen entspricht einer Verschiebung senkrecht zu den Achsen um den doppelten Abstand der beiden Achsen.**

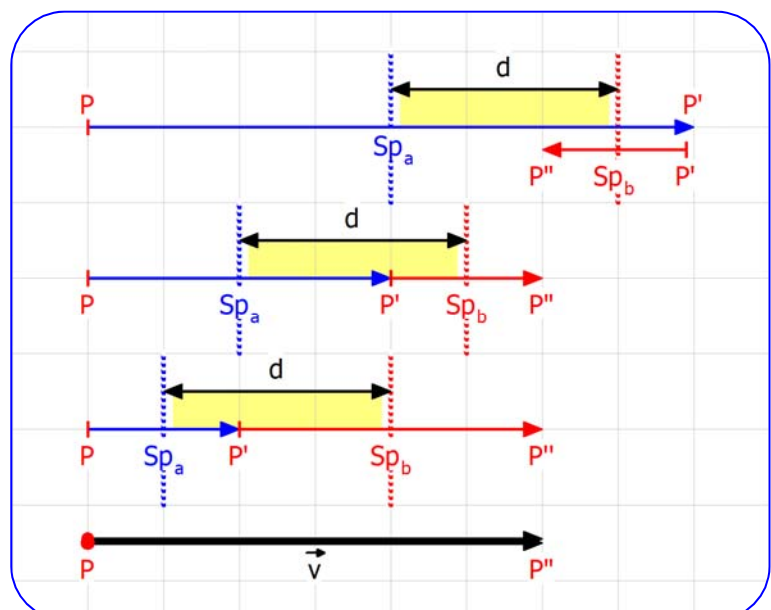
**Interessant ist auch die Umkehrung:**

**Man kann eine Verschiebung durch eine Doppelspiegelung ersetzen. Die beiden Achsen müssen orthogonal zur Verschiebungsrichtung sein, ihr Abstand so groß wie die halbe Verschiebungsstrecke.**

**Die weitere Position der Achsen ist unwichtig**

Die parallelen Achsen a und b haben dreimal denselben Abstand d, aber eine andere Position.

Führt man die Spiegelungen  $Sp_a$  und  $Sp_b$  nacheinander von P aus nach P'' aus, entspricht dies genau der Verschiebung  $\vec{v} = \overrightarrow{PP''}$ , die doppelt so lang ist wie der Abstand d.



**Beispiel** Es sei  $\alpha_1: \bar{x}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}$  die Spiegelung an  $y = 2x$  (Seite 5 oder 9)

und  $\alpha_2: \bar{x}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}' + \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,2 \end{pmatrix}$  die Spiegelung an  $y = 2x + 3$

Verkettung der beiden Spiegelungen = Doppelspiegelung = Verschiebung:

$$\alpha_2 \circ \alpha_1: \bar{x}'' = \underbrace{\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}'' = \bar{x} + \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

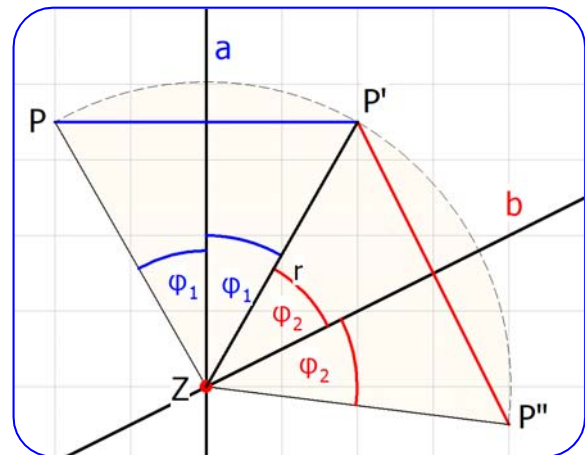
### 3. Fall: Die beiden Spiegelungsachsen schneiden einander.

Die Abbildung zeigt die Doppelspiegelung von P an a und dann an b.

Von großer Bedeutung ist dabei der Schnittpunkt Z der Achsen a und b.

So bilden P, P' und Z ein gleichschenkliges Dreieck, sodass links zu beiden Seiten der Achse zwei gleich große Winkel  $\varphi_1$  liegen. Analoges gilt für P'P"Z.

Daher sind die Strecken ZP, ZP' und ZP" gleich lang und bilden den Radius eines Kreises, auf dem P, P' und P" liegen.



Ergebnis: P kann auch durch eine Drehung um Z auf P" abgebildet werden.

Der Drehwinkel ist  $\varphi = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$ , und er ist doppelt so groß wie der Schnittwinkel von a und b.

**Diese Doppelspiegelung an nicht parallelen Achsen entspricht einer Drehung m den Achsenschnittpunkt um den doppelten Winkel der beiden Achsen.**

**Interessant ist auch die Umkehrung:**

**Man kann eine Drehung durch eine Doppelspiegelung ersetzen. Die beiden Achsen müssen durch das Drehzentrum gehen, ihr Schnittwinkel ist halb so groß wie der Drehwinkel. Die weitere Position der Achsen ist unwichtig**

Beispiel:

Hier liegt für den Punkt P(-2 | 3,5) dieselbe Drehung nach P" vor wie in der oberen Grafik.

Und diese Drehung wird durch eine andere Doppelspiegelung an a bzw. b ersetzt.

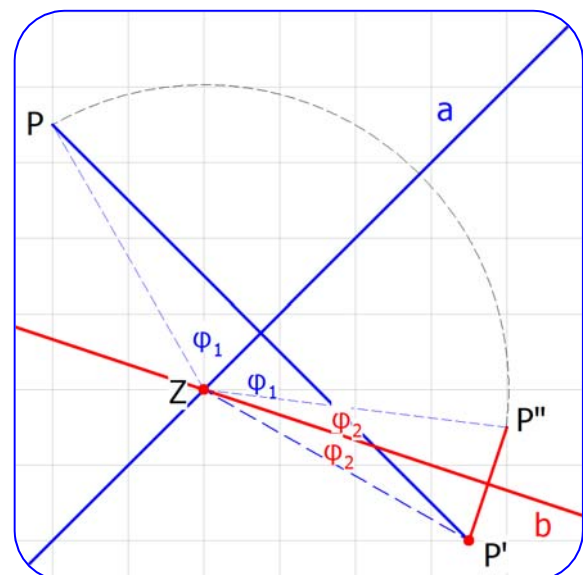
Die Achse a ist  $y = x$ . P wird an a nach P' gespiegelt.

Es ist  $\sphericalangle ZPP' = 2\varphi_1$ .

Dann wird P' an der Achse b:  $y = -\frac{1}{3}x$  nach P" gespiegelt. Es ist  $\sphericalangle ZP'P'' = 2\varphi_2$ .

Und der Drehwinkel  $\sphericalangle ZPP'' = 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 - \varphi_2)$

ist doppelt so große wie der Winkel  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  zwischen den Achsen a und b.



## Aufgaben

- (1) Die Verschiebung durch den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  soll durch eine Doppelspiegelung ersetzt werden.  
 $V_{\vec{v}} = S_h \circ S_g$ , wobei  $h$  durch den Punkt  $A(-3 | -1)$  gehen soll.  
Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ . Welche Gleichungen haben sie?
- (2) Die Verschiebung durch den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  soll durch eine Doppelspiegelung ersetzt werden.  
 $V_{\vec{v}} = S_h \circ S_g$ , wobei  $h$  durch den Punkt  $A(-2 | -3)$  gehen soll.  
Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ .
- (3) Die Drehung um  $Z(-1 | -2)$  um  $230^\circ$  soll durch eine Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  ersetzt werden.  
Die Achse  $g$  soll durch  $A(-2 | 3)$  gehen. Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ .  
Bilde  $P(3 | -4)$  zur Kontrolle auf beide Arten ab.
- (4) Die Drehung um  $Z(1 | 3)$  um  $190^\circ$  soll durch eine Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  ersetzt werden.  
Die Achse  $g$  soll durch  $A(5 | -2)$  gehen. Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ .  
Bilde  $P(3 | 6)$  zur Kontrolle auf beide Arten ab.
- (5) Ersetze die Abbildung  $V_{\vec{v}} \circ D_{M,250^\circ}$  so durch Geradenspiegelungen, dass am Ende eine Drehung übrig bleibt. Dabei sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $M(-1 | 1)$ .  
Konstruiere das Bild des Punktes  $P(-3 | 3)$ .
- (6) Ersetze die Abbildung  $D_{A,280^\circ} \circ D_{B,200^\circ}$  so durch Geradenspiegelungen, dass am Ende eine Drehung übrig bleibt. Dabei sei  $A(2 | 4)$  und  $B(-1 | -11)$ .  
Konstruiere das Bild des Punktes  $P(4 | 3)$ .



## Lösungen

- (1) Die beiden Ersatzgeraden sind orthogonal zum Verschiebungsvektor, und ihr Abstand muss halb so groß sein wie der Betrag des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

$$m_{\vec{v}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_h = \frac{2}{3}$$

h geht durch  $A(-3 | -1)$ :

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$$

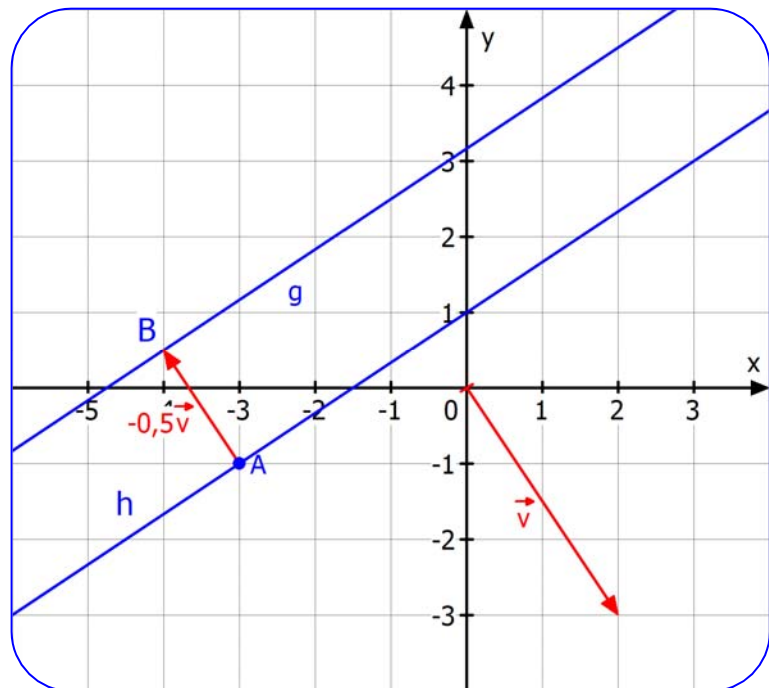
Da g vor h als Achse verwendet wird, erreicht man einen Punkt von g, indem man rechnet:

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$B(-4 | 0,5)$$

g geht durch B:

$$y - 0,5 = \frac{2}{3}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$$



- (2) Die beiden Ersatzgeraden sind orthogonal zum Verschiebungsvektor, und ihr Abstand muss halb so groß sein wie der Betrag des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$m_{\vec{v}} = -\frac{4}{3}$$

$$m_h = \frac{3}{4}$$

h geht durch  $A(-2 | -3)$ :

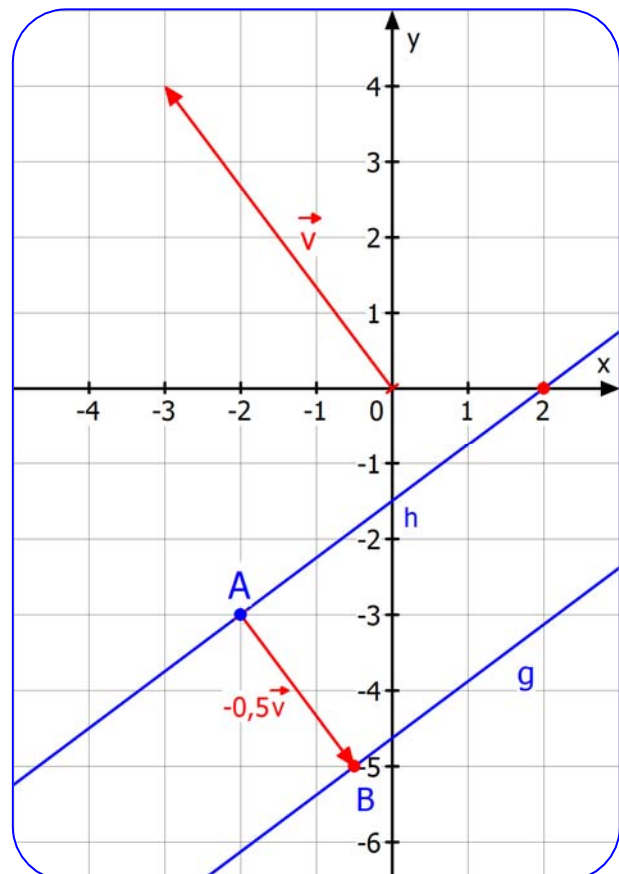
$$y + 3 = \frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

Da g vor h als Achse verwendet wird, erreicht man einen Punkt von g, indem man rechnet:

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(-\frac{1}{2} | -5)$$

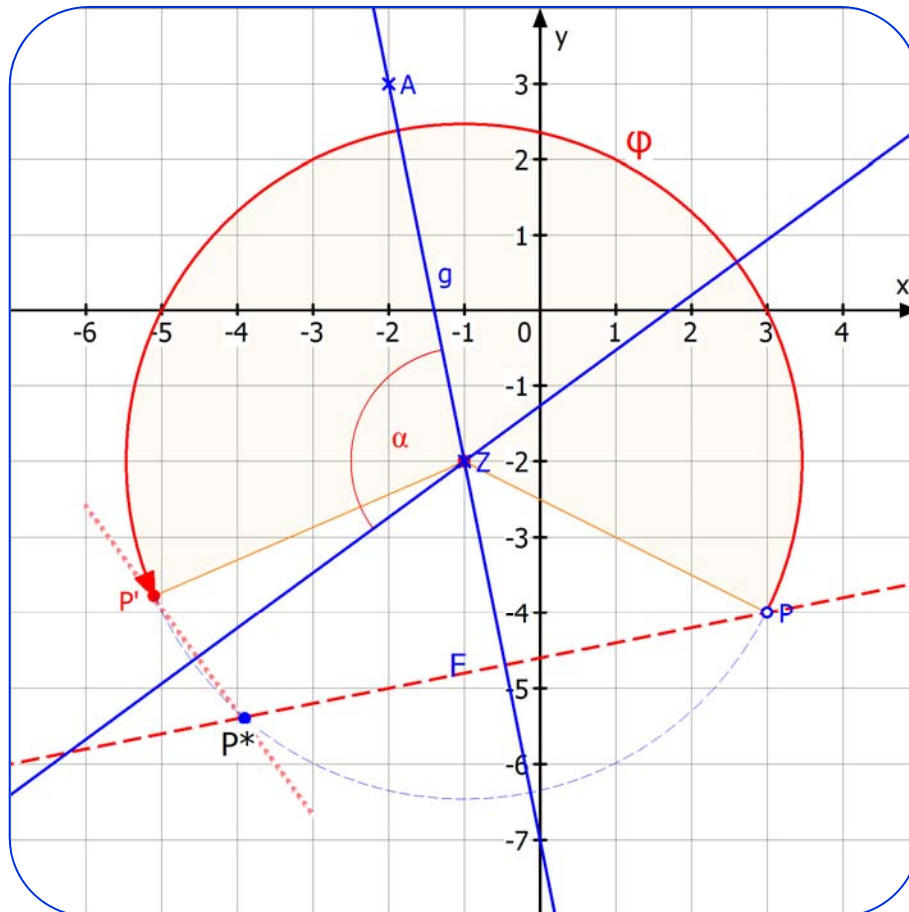
g geht durch B:

$$y + 5 = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{37}{8}$$



## Lösungen

- (3) Die Drehung um  $Z(-1|-2)$  um  $230^\circ$  soll durch eine Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  ersetzt werden. Die Achse  $g$  soll durch  $A(-2|3)$  gehen. Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ . Bilde  $P(3|-4)$  zur Kontrolle auf beide Arten ab.



Bei der Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  wird zuerst an  $g$  gespiegelt ( $P \rightarrow P^*$ ), dann an  $h$  ( $P^* \rightarrow P'$ ).

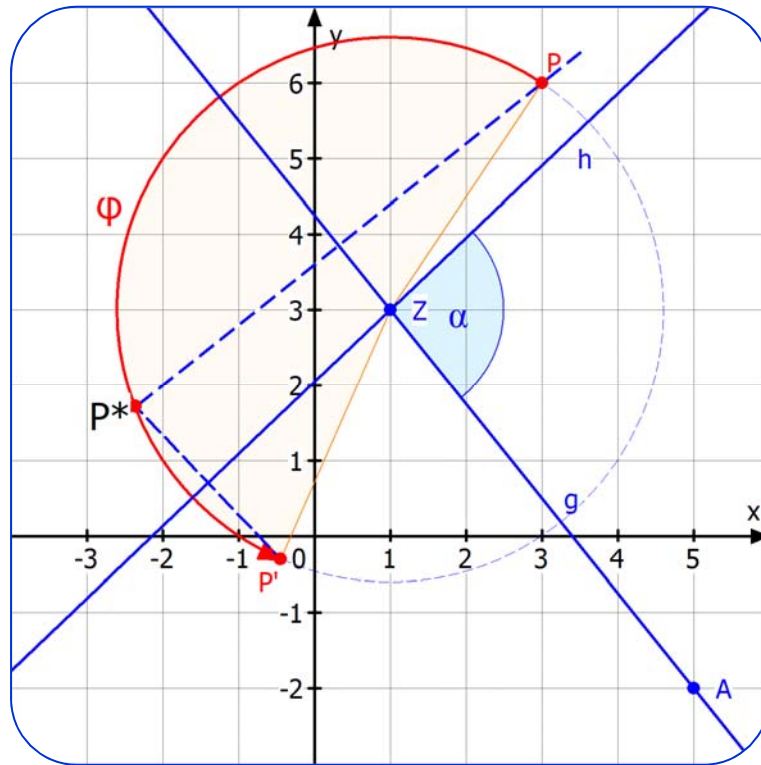
Das ersetzt die Drehung um  $Z$  um den Winkel  $\varphi = 230^\circ$

Zur Konstruktion der Spiegelachsen:

Zuerst zeichnet man  $g = (AZ)$ , dann  $h$  durch  $Z$ , so dass  $\alpha = \sphericalangle(g,h) = \frac{1}{2}\varphi = 115^\circ$  ist.

## Lösungen

- (4) Die Drehung um  $Z(1|3)$  um  $190^\circ$  soll durch eine Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  ersetzt werden. Die Achse  $g$  soll durch  $A(5|-2)$  gehen. Konstruiere die Geraden  $g$  und  $h$ . Bilde  $P(3|6)$  zur Kontrolle auf beide Arten ab.



Bei der Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  wird zuerst an  $g$  gespiegelt ( $P \rightarrow P^*$ ), dann an  $h$  ( $P^* \rightarrow P'$ ).

Das ersetzt die Drehung um  $Z$  um den Winkel  $\varphi = 190^\circ$

Zur Konstruktion der Spiegelachsen:

Zuerst zeichnet man  $g = (AZ)$ , dann  $h$  durch  $Z$ , so dass  $\alpha = \sphericalangle(g, h) = \frac{1}{2}\varphi = 95^\circ$  ist.

## Lösungen

- (5) Ersetze die Abbildung  $V_{\vec{v}} \circ D_{M, 250^\circ}$  so durch Geradenspiegelungen, dass am Ende eine Drehung übrig bleibt. Dabei sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $M(-1|1)$ .  
Konstruiere das Bild des Punktes  $P(-3|3)$ .

**Wissen:** Eine Verschiebung kann durch die Spiegelung an zwei parallelen Geraden ersetzt werden, die orthogonal zur Verschiebungsrichtung sind. Eine Drehung kann durch die Spiegelung an zwei Geraden ersetzt werden, die sich im Drehzentrum schneiden.

Da man jeweils eine der Spiegelungsachsen frei wählen kann, besteht die Lösungs-idee darin, dass man für Verschiebung und Drehung eine gemeinsame Spiegelung verwendet.

$V = S_g \circ S_h$  und  $D = S_h \circ S_k$ . Dann folgt für die Gesamtabbildung  $G$ :

$$G = V_{\vec{v}} \circ D_{M, 250^\circ} = (S_g \circ S_h) \circ (S_h \circ S_k) = S_g \circ \underbrace{(S_h \circ S_h)}_{\text{id}} \circ S_k = S_g \circ S_k.$$

Führt man zweimal dieselbe Spiegelung nacheinander aus, dann erhält man die nichts verändernde identische Abbildung. Dadurch bleibt am Ende eine Doppelspiegelung an  $g$  und  $k$  übrig. Weil sich  $g$  und  $k$  schneiden, ist die resultierende Abbildung  $G$  eine Drehung um den Schnittpunkt  $Z$  von  $g$  und  $k$ .

Man zeichnet  $h$  senkrecht zu  $\vec{v}$  durch  $M$  und  $g$  parallel dazu im Abstand von  $\frac{1}{2}\vec{v}$ .

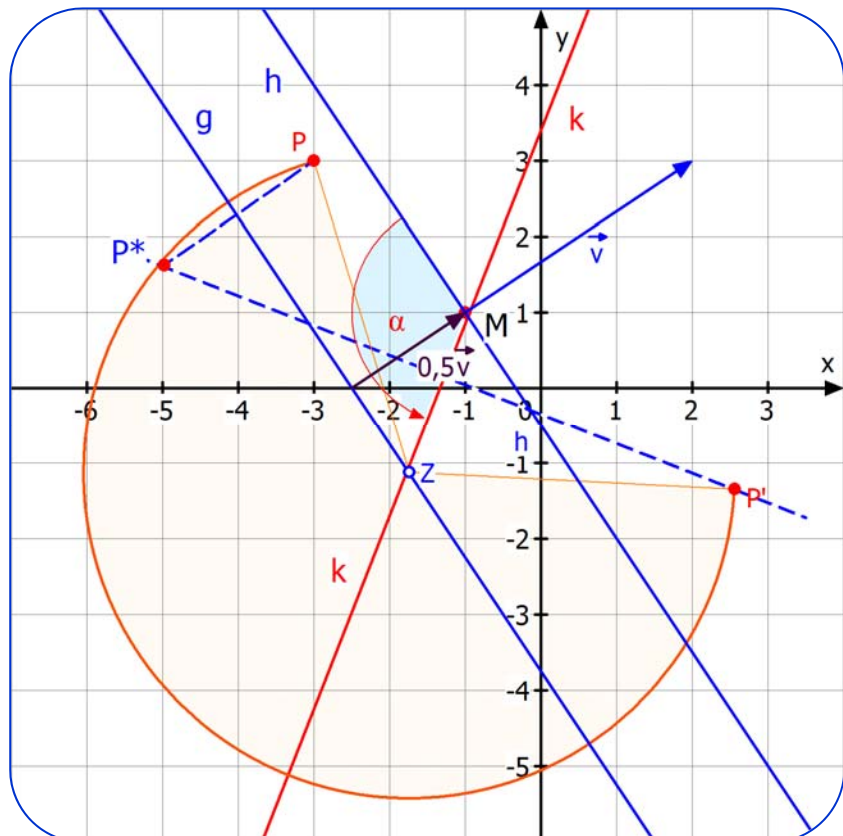
Dann folgt  $k$  durch  $M$  im Winkel

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi = 125^\circ.$$

$k$  und  $g$  schneiden einander in  $Z(-1,74 | -1,12)$ .

der rote Kreisbogen zeigt die Drehung von  $P$  um  $Z$  um den Winkel  $\varphi = 250^\circ$  bis  $P'$ .

Die gestrichelten Linien zeigen wie man  $P$  durch die Doppelspiegelung an  $g$  und  $k$  auch auf  $P'$  abbilden kann.



## Lösungen

- (6) Ersetze die Abbildung  $D_{A,280^\circ} \circ D_{B,200^\circ}$  so durch Geradenspiegelungen, dass am Ende eine Drehung übrig bleibt. Dabei sei  $A(2|4)$  und  $B(-1|-1)$ .  
Konstruiere das Bild des Punktes  $P(4|3)$ .

**Wissen:** Eine Drehung kann durch die Spiegelung an zwei Geraden ersetzt werden, die sich im Drehzentrum schneiden. Da man jeweils eine der Spiegelungsachsen frei wählen kann, besteht die Lösungsidee darin, dass man für die beiden Drehungen eine gemeinsame Spiegelung verwendet.

$$D_A = S_g \circ S_h \quad \text{und} \quad D_B = S_h \circ S_k. \quad \text{Dann folgt für die Gesamtabbildung } G:$$

$$G = D_A \circ D_B = (S_g \circ S_h) \circ (S_h \circ S_k) = S_g \circ \underbrace{(S_h \circ S_h)}_{\text{id}} \circ S_k = S_g \circ S_k.$$

Führt man zweimal dieselbe Spiegelung nacheinander aus, dann erhält man die nichts verändernde identische Abbildung. Dadurch bleibt am Ende eine Doppelspiegelung an  $g$  und  $k$  übrig. Weil sich  $g$  und  $k$  schneiden, ist die resultierende Abbildung  $G$  eine Drehung um den Schnittpunkt  $Q$  von  $g$  und  $k$ .

Man beginnt mit den Drehzentren  $A$  und  $B$ . Durch sie legt man die Gerade  $h$ , die zu beiden Drehungen gehörende Spiegelungsgerade.

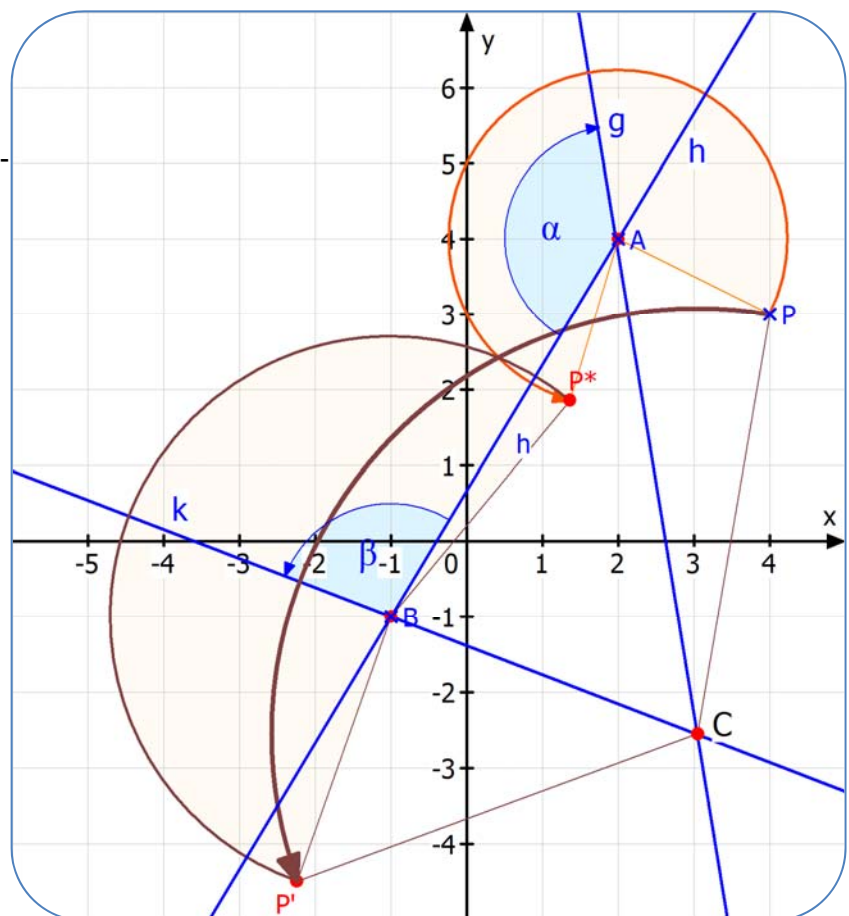
Die Drehung um  $A$  beträgt  $280^\circ$ . Also muss der Winkel zwischen den Ersatzgeraden  $g$  und  $h$   $\alpha = 140^\circ$  betragen,

Die Drehung um  $B$  wird durch die Doppelspiegelung an  $h$  und  $k$  ersetzt. Der Winkel zwischen  $h$  und  $k$  ist  $\beta = \frac{1}{2} \cdot 200^\circ = 100^\circ$ .

Der Schnittpunkt  $C \approx (3,05 | -2,55)$  ist das Zentrum der resultierenden Drehung. Der Drehwinkel ist

Der Bildpunkt  $P' \approx (-2,24 | -4,5)$

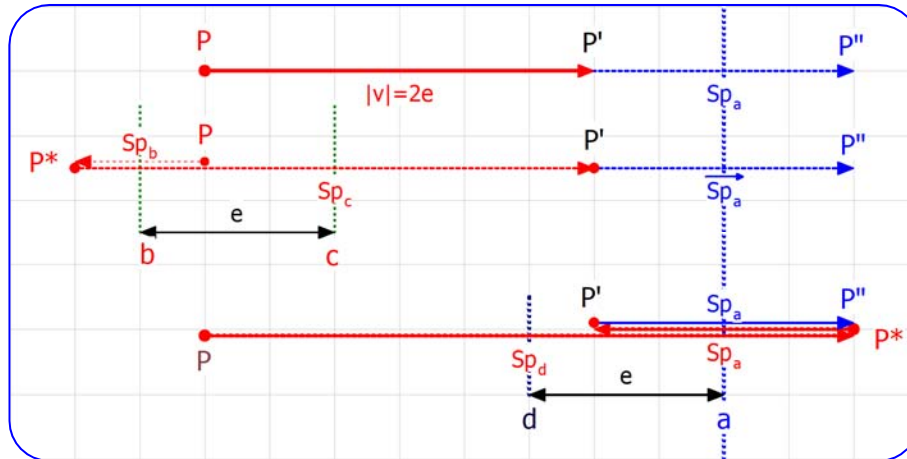
entsteht entweder durch die Drehung um  $C$  oder durch die Doppelspiegelung an  $g$  und  $k$ .  
(Diese ist nicht eingezeichnet.)



## 6 Dreifachspiegelungen

Durch die Tatsache, dass man eine Verschiebung oder eine Drehung durch eine Doppelspiegelung ersetzen kann, ergeben sich interessante Möglichkeiten, die ich kurz aufzeigen möchte.

### 6.1 Verkettung einer Verschiebung und einer Spiegelung in gleicher Richtung



Hier wird P nach P'' abgebildet und zwar auf drei verschiedene Weisen:

1. Zeile:  $P \xrightarrow[\text{Vektor } \vec{v}]{\text{Versch.}} P' \xrightarrow[\text{Achse } a]{\text{Spiegelung}} P''$

2. Zeile:  $P \xrightarrow[\text{Achse } b]{\text{Spiegelung}} P^* \xrightarrow[\text{Achse } c]{\text{Spiegelung}} P' \xrightarrow[\text{Achse } a]{\text{Spiegelung}} P''$   
Ersatz für Verschiebung

Die Verschiebung wird durch eine Doppelspiegelung ersetzt.

Die Achsen müssen orthogonal zu  $\vec{v}$  sein, ihr Abstand muss halb so lang sein wie der Verschiebungspfeil, die genaue Position ist dann beliebig.

3. Zeile:  $P \xrightarrow[\text{Achse } d]{\text{Spiegelung}} P^* \xrightarrow[\text{Achse } a]{\text{Spiegelung}} P' \xrightarrow[\text{Achse } a]{\text{Spiegelung}} P''$   
Ersatz für Verschiebung

Auch hier wurde die Verschiebung durch eine Doppelspiegelung ersetzt.

Aber die zweite Achse ist identisch mit der Achse der 1. Zeile.

Dadurch fällt P\* mit P'' zusammen. Es wird dann zweimal an a gespiegelt, was sich ja bekanntlich aufhebt.

Also wird in der 3. Zeile P nur durch eine einzige Achsenspiegelung auf P'' abgebildet.

**ERGEBNIS:** Wird eine Verschiebung mit einer Achsenspiegelung in gleicher Richtung verkettet, dann kann die resultierende Abbildung durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden.

## 6.2 Verkettung einer Drehung und einer Spiegelung, wenn das Drehzentrum auf der Spiegelachse liegt.

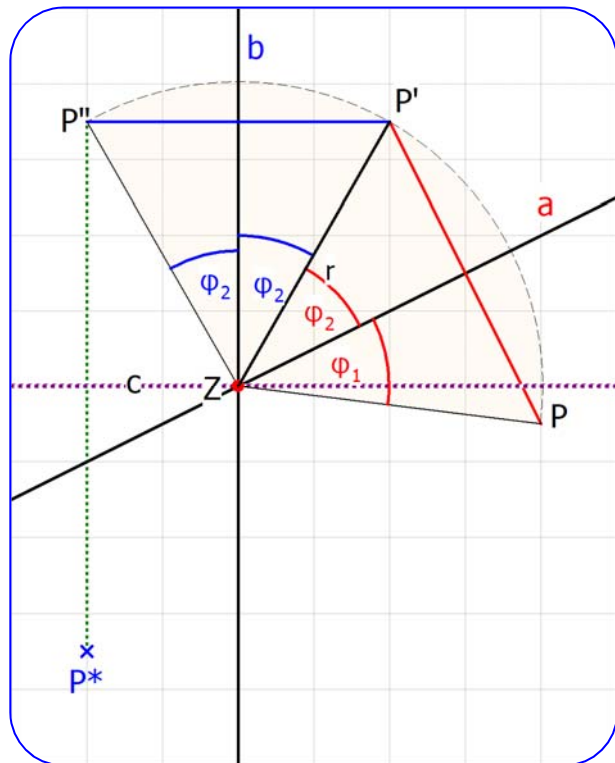
Die Drehung von P um Z um  $126,87^\circ$  nach P'' und anschließende Spiegelung an der Achse c.

kann auch als Dreifachspiegelung ausgeführt werden. Dazu benötigt man als Ersatz für die Drehung eine Doppelspiegelung an zwei Achsen, die durch das Drehzentrum gehen und einen Winkel von  $\frac{1}{2}\varphi = 64,43^\circ$  einschließen.

Dann ergibt sich diese Ersatzabbildung:

$$P \xrightarrow[\text{an } a]{\text{Spiegelung}} P' \xrightarrow[\text{an } b]{\text{Spiegelung}} P'' \xrightarrow[\text{an } c]{\text{Spiegelung}} P^*$$

Drehung um Z.

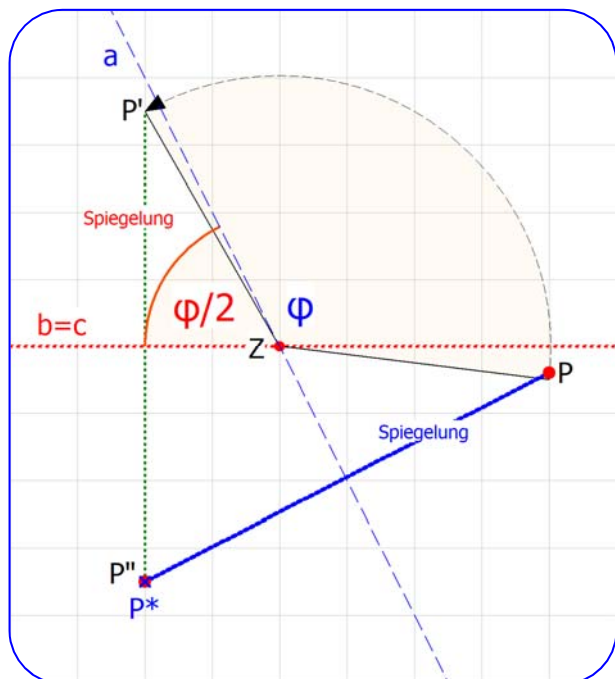


Wenn man die beiden Achsen a und b so wählt, dass b mit der Achse c zusammenfällt, ergibt sich folgende Situation:

$$P \xrightarrow[\text{an } a]{\text{Spiegelung}} P' \xrightarrow[\text{an } b=c]{\text{Spiegelung}} P'' \xrightarrow[\text{an } c]{\text{Spiegelung}} P^*$$

identische Abbildung  
Drehung um Z.

Da die zweite und die dritte Spiegelung an der gleichen Achse ausgeführt werden, haben sie sich auf, so dass die resultierende Abbildung eine einzige Achsenspiegelung ist.



**ERGEBNIS:** Wird eine Drehung mit einer Spiegelung an einer Achse durch das Drehzentrum verkettet, dann kann die resultierende Abbildung durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden.

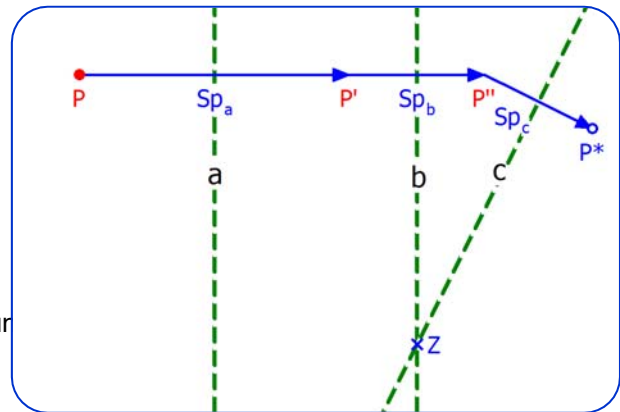


### 6.3 Verkettung einer Verschiebung und einer Spiegelung in verschiedenen Richtungen.

**1. Fall:**  $a \parallel b, b \cap c = \{Z\}$

Diese Dreifachspiegelung lässt sich auf zwei Arten anders darstellen:

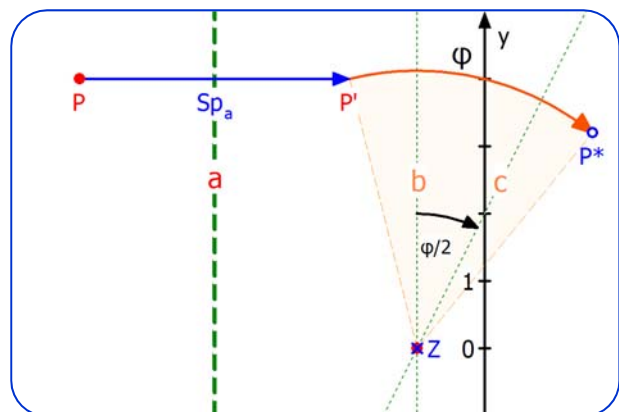
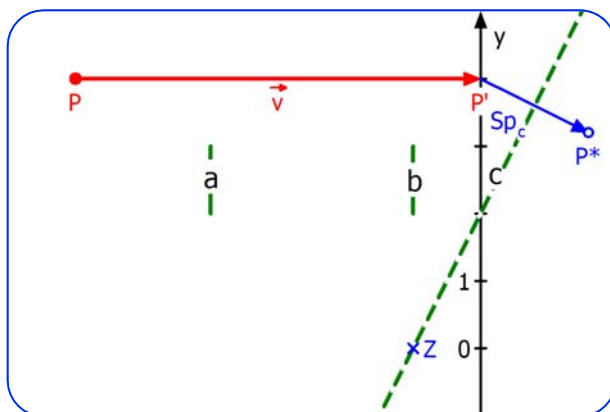
(a) Weil  $a$  und  $b$  parallel sind, kann man die Doppelspiegelung an  $a$  und  $b$  durch eine Verschiebung ersetzen:  $\vec{v} = \overline{PP''}$ .



Und die Verkettung einer Verschiebung mit einer Spiegelung an  $c$  ist eine **Gleitspiegelung**.

(b) Weil sich  $b$  und  $c$  schneiden, kann man die Doppelspiegelung an  $b$  und  $c$  durch eine Drehung um den Schnittpunkt  $Z$  ersetzen. Der Drehwinkel  $\varphi$  ist doppelt so groß wie der Schnittwinkel  $b / c$ .

Die Verkettung einer Spiegelung mit einer Drehung ist natürlich auch eine **Gleitspiegelung**, denn in beiden Fällen ist der Hintergrund ja dieselbe Dreifachspiegelung.





## 2. Fall: Keine zwei der drei Achsen sind parallel und es gehen nicht alle drei durch einen gemeinsamen Punkt.

**Auch in diesem Falle liegt eine Gleitspiegelung vor.**

Die erste Abbildung zeigt die Dreifachspiegelung. Außerdem wurde die Doppelspiegelung an a und b durch eine Drehung um deren Schnittpunkt S ersetzt. Der Drehwinkel  $\varphi$  ist doppelt so groß wie der Schnittwinkel von a und b.

Nun sollte bekannt sein, dass man umgekehrt jede Drehung durch eine Doppelspiegelung ersetzen kann. Dabei müssen die beiden Achsen durch das Drehzentrum gehen und den halben Drehwinkel einschließen. Die weitere Lage ist egal.

Also kann man die zweite Achse b als Parallele zu c wählen und passend a dazu nehmen.

Das wird in der unteren Abbildung gezeigt:

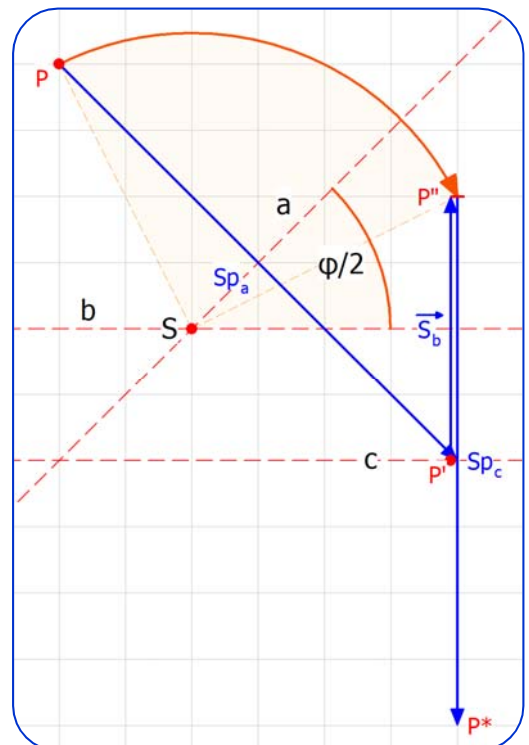
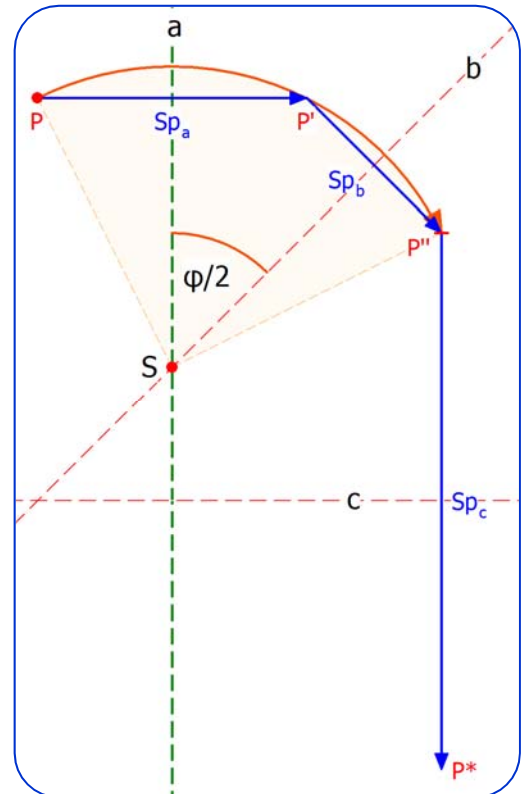
Die Drehung  $P \xrightarrow{\varphi} P''$  ist identisch mit der oberen Abbildung, die beiden neuen Ersatz-Achsen a und b für die Doppelspiegelung sind eingezeichnet, und zwar so dass die Achse b parallel zur dritten Spiegelungsachse c ist.

Damit verläuft die Dreifachspiegelung nun so:

$$P \xrightarrow[\text{an } a]{\text{Spiegelung}} P' \xrightarrow[\text{an } b]{\text{Spiegelung}} P'' \xrightarrow[\text{an } c]{\text{Spiegelung}} P^*$$

Verschiebung, da  $b \parallel c$  ist

Und so wurde aus diese Art Dreifachspiegelung eine **Gleitspiegelung**.



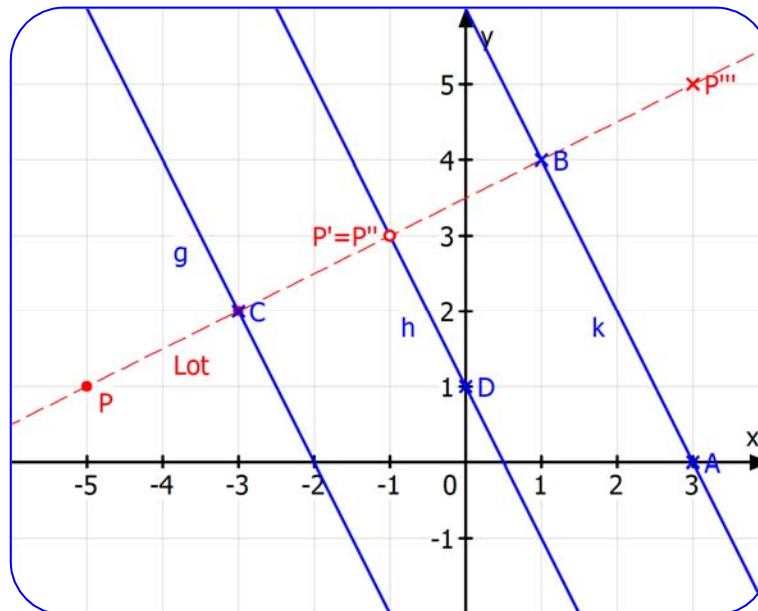
### Zusammenfassung über Dreifachspiegelungen

Sind die drei Spiegelungsachsen parallel (6.1), oder gehen sie durch einen Punkt (6.2), dann ist die Dreifachspiegelung ersetzbar durch eine einzige Spiegelung.

In jedem anderen Falle ist die Dreifachspiegelung eine Gleitspiegelung.

## 6.4 Aufgaben zu Mehrfachspiegelungen

- (1) Gegeben sind die Punkte  $A(3|0)$ ,  $B(1|4)$ ,  $C(-3|2)$ ,  $D(0|-1)$ .  
 Dazu die Geraden  $k = (AB)$ ,  $g$  ist parallel zu  $h$  und geht durch  $C$ ,  $h$  ist auch parallel zu  $k$  und geht durch  $D$ .  
 Durch welche Abbildung kann man  $S_k \circ S_h \circ S_g$  ersetzen?  
 Stelle diese Situation graphisch dar und bilde  $P(-5|1)$  ab.



Für  $P$  gilt diese Abbildungsfolge:

$$P(-5|1) \xrightarrow{S_g} P'(-1|3) \xrightarrow{S_h} P''(-1|3) \xrightarrow{S_k} P'''(3|5)$$

Eine Doppelspiegelung an parallelen Geraden hat die Wirkung einer Verschiebung um den doppelten Abstand der beiden Geraden.

Also ist z. B.  $S_h \circ S_g$  eine Verschiebung durch den Vektor  $\vec{v} = \overline{CB}$ .

Angewandt auf  $P$  bedeutet das:  $P(-5|1) \xrightarrow{S_g} P'(-1|3) \xrightarrow{S_h} P''(-1|3) \xrightarrow{S_k} P'''(3|5)$   
Verschiebung mit  $\vec{v}$

Nun kann man aber umgekehrt eine Verschiebung durch eine Doppelspiegelung ersetzen und kann dazu die beiden parallelen Geraden als Paar beliebig platzieren. Sie müssen nur ihren Abstand und die Richtung übernehmen.

Sinnvoll wäre es hier, diese Verschiebung durch die Doppelspiegelung  $S_k \circ S_h$  darzustellen.

Dann geht die Gesamtabbildung von  $S_k \circ (S_h \circ S_g)$  über in  $S_k \circ V_{\vec{v}}$  und dann in

$$S_k \circ (S_k \circ S_h) = \underbrace{(S_k \circ S_k)}_{\text{id}} \circ S_h = S_h.$$

Oder eine andere Möglichkeit.

Ergebnis: Diese Dreifachspiegelung hat dieselbe Wirkung wie eine einfache Achsenspiegelung.

(2) Gegeben sind die Punkte  $A(3|0)$ ,  $B(1|4)$ ,  $C(-3|2)$ ,  $D(0|-1)$ .

Dazu die Geraden  $h = (AB)$ ,  $g$  ist parallel zu  $h$  und geht durch  $C$ ,  $k$  ist auch parallel zu  $h$  und geht durch  $D$ .

Durch welche Abbildung kann man  $S_g \circ S_k \circ S_h$  ersetzen? (Variante zu Aufgabe (1)).

Stelle diese Situation graphisch dar und bilde  $P(-5|1)$  ab.

Für  $P$  gilt diese Abbildungsfolge:

$$P(-5|1) \xrightarrow{S_h} P'(3|5) \xrightarrow{S_k} P''(-1|3) \xrightarrow{S_g} P'''(-5|1) = P$$

Eine Doppelspiegelung an parallelen Geraden hat die Wirkung einer Verschiebung um den doppelten Abstand der beiden Geraden.

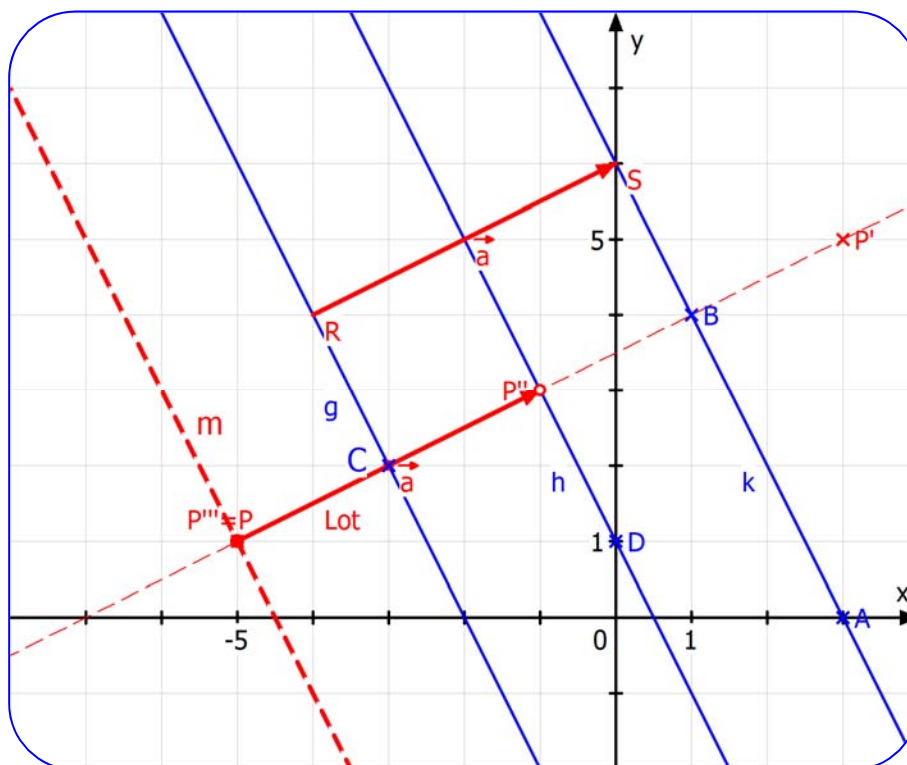
Also ist z. B.  $S_g \circ S_k$  eine Verschiebung durch den Vektor  $\vec{a} = \overline{RS}$ .

$$\text{Angewandt auf } P \text{ bedeutet das: } P(-5|1) \xrightarrow{S_h} \underbrace{P'(3|5)}_{V_{\vec{a}}} \xrightarrow{S_k} P''(-1|3) \xrightarrow{S_g} P'''(-5|1) = P$$

Damit wird unsere Dreifachspiegelung  $S_g \circ S_k \circ S_h$  zu  $S_g \circ V_{\vec{a}}$ . Die Verschiebung kann man wieder durch

eine andere Doppelspiegelung an parallelen Geraden ersetzen, etwa durch  $V_{\vec{a}} = S_g \circ S_m$ , wobei  $m$  eine

geeignete Parallele zu  $g$  ist. Dann wird  $S_g \circ S_k \circ S_h$  zu  $S_g \circ (S_g \circ S_m) = \underbrace{(S_g \circ S_g)}_{id} \circ S_m = S_m$



Auch hier ist die Dreifachspiegelung ersetzbar durch eine einzige Spiegelung.

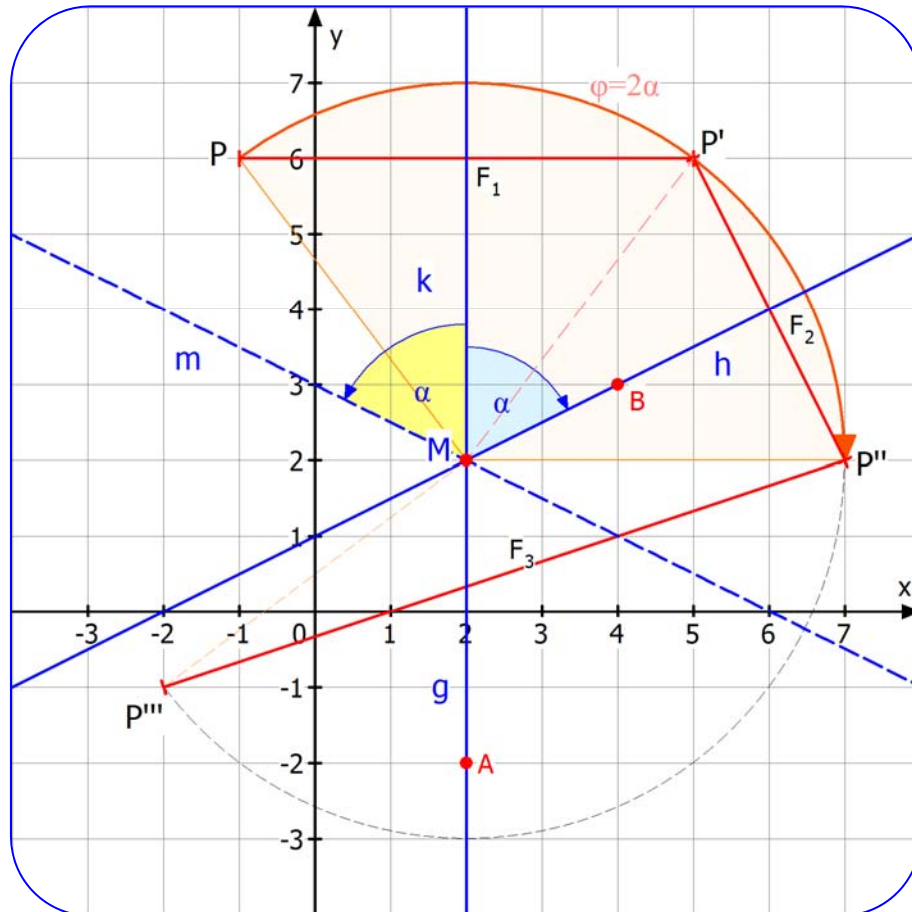
(3) Gegeben sind die Punkte  $A(2|-2)$ ,  $B(4|3)$ ,  $C(1|5)$ ,  $M(2|2)$ .

Dazu die Geraden  $g = (AM)$ ,  $h = (BM)$  und  $k = (CM)$ .

Durch welche Abbildung kann man  $S_k \circ S_h \circ S_g$  ersetzen?

Stelle diese Situation graphisch dar und bilde  $P(-5|1)$  ab.

falsch!!!



Die Abbildung zeigt folgendes: Spiegelt man  $P$  an  $g$ , erhält man  $P'$ .

Die anschließende Spiegelung an  $h$  führt zu  $P''$ , die nächste Spiegelung an  $k$  ergibt  $P'''$ .

Die Abstände der Punkte  $P$  bis  $P'''$  von  $M$  sind alle gleich groß. Dies wird ersichtlich, wenn man beachtet, dass bei jeder Spiegelung das Dreieck  $PMF_i$  rechtwinklig ist und kongruent zum gespiegelten Dreieck ist.

Also liegen  $P$  und die drei Bildpunkte auf einem Kreis um  $M$ .

Man kann die Doppelspiegelung  $S_h \circ S_g$  als Drehung um  $M$  verstehen, und zwar um den Drehwinkel

$\varphi = 2\alpha = 126,87^\circ$ , wobei  $\alpha = \sphericalangle(g,h) = 63,4^\circ$  ist. Diese Drehung kann man ihrerseits durch eine

andere Doppelspiegelung ersetzen, etwa durch  $D_M = S_k \circ S_m$ . Dann folgt für die Dreifachspiegelung:

$$G = S_k \circ \underbrace{(S_h \circ S_g)}_{D_M} = S_k \circ \underbrace{(S_k \circ S_m)}_{D_M} = \underbrace{(S_k \circ S_k)}_{\text{id}} \circ S_m = S_m$$

Das heißt sie ist im Grund nur eine einfache Achsenspiegelung an einer Achse  $m$ . Diese findet man

so: Bei  $S_h \circ S_g$  dreht man von  $h$  um  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn nach  $g$ . Analog dreht man

bei  $S_k \circ S_m$  von  $k$  um  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn nach  $m$ .

(4) Man spiegle den Punkt  $A(5 | -1)$  zuerst an  $a_1: y = -\frac{1}{2}x - 1$ , dann an  $a_2: y = \frac{1}{2}x - 1$ .

Berechne die Koordinaten des Bildpunktes. Zeige, dass man die Verkettung  $\alpha_2 \circ \alpha_1$ : dieser beiden Achsen Spiegelungen durch eine Drehung ersetzen kann.

### Lösung:

Die Spiegelung  $\alpha_1$  an  $y = -\frac{1}{2}x - 1$  hat diese Abbildungsgleichung  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -0,8 \\ -1,6 \end{pmatrix}$

Die Spiegelung  $\alpha_2$  an  $y = \frac{1}{2}x - 1$  hat diese Abbildungsgleichung  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ -1,6 \end{pmatrix}$

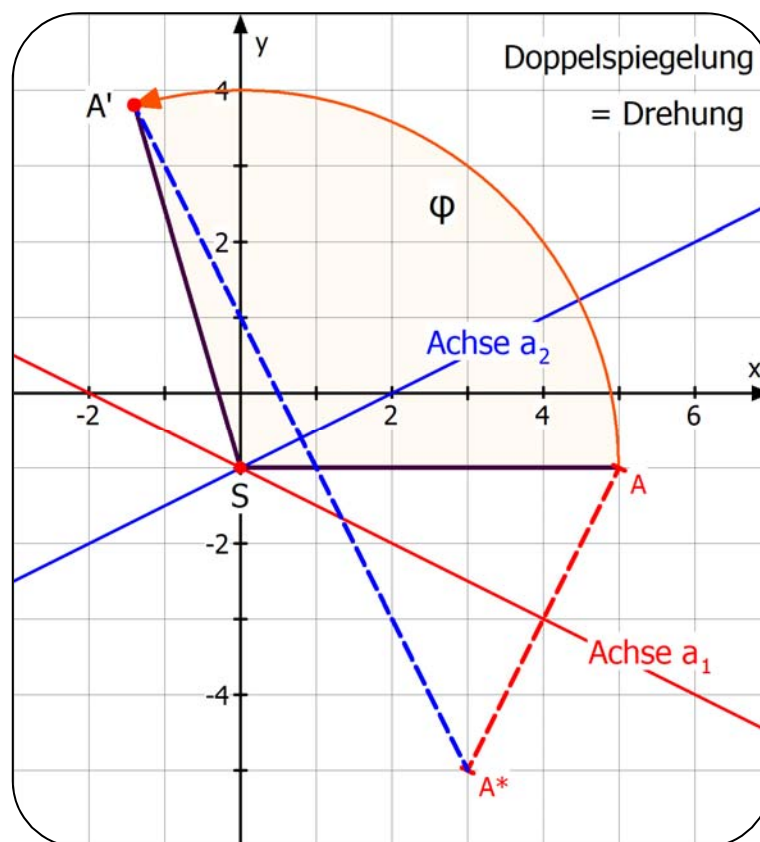
Die Verkettung der beiden Spiegelungen (Doppelspiegelung) ergibt eine Drehung:

$$\alpha_2 \circ \alpha_1: \quad \bar{x}'' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -0,96 \\ -0,72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,28 & -0,96 \\ 0,96 & -0,28 \end{pmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{pmatrix} -0,96 \\ -0,72 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,36-0,64 & -0,48-0,48 \\ 0,48+0,48 & -0,64+0,36 \end{pmatrix}$$

Die Matrix gehört zu einer Drehung um  $\varphi \approx 106,26^\circ$  um den Fixpunkt  $S(0 | -1)$ .

Der Drehwinkel ist der doppelte Schnittwinkel der beiden Achsen.



## 7 Spiegelungsgleichung mit homogenen Koordinaten.

- (1) Gibt man einem Punkt  $P(x|y)$  die dritte Koordinate  $z = 1$  und schreibt  $P^*[x|y|1]$ , dann nennt man diese homogene Koordinaten. (Siehe Text 21201 Seite 33).

Die Abbildungsgleichung  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bar{x}$  muss dann lauten  $\bar{x}^{*'} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Wenn ein Verschiebungsvektor  $\vec{v}$  dabei steht, also  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ,

dann verwendet man für homogene Koordinaten:  $\bar{x}^{*'} = \begin{pmatrix} a & b & v_1 \\ c & d & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ .

An dieser Stelle erkennt man den Vorteil diese Maßnahme: Jetzt enthält die Abbildungsgleichung keinen addierten Verschiebungsvektor mehr. Das vereinfacht manche Rechnung, zum Beispiel bei der Verkettung von Abbildungen.

- (2) **Zahlenbeispiel** von Seite 22:  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

Dies ist die Gleichung für die Spiegelung an der Geraden  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ .

Ich spiegle nun den Punkt  $A(2|-3)$ :

$$\bar{a}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 - 2,4 \\ 1,6 + 1,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0|1)$$

Das ganze transformiere ich nun in homogene Koordinaten:

Die Abbildungsgleichung lautet dann:  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Abbildung von  $A(2|-3)$  bzw.  $A^*[2|-3|1]$

$$\bar{a}^{*'} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 - 2,4 + 1,2 \\ 1,6 + 1,8 - 2,4 \\ 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{=} A'(0|1)$$

- (c) Was passiert, wenn man **zweimal nacheinander** spiegelt? Jeder weiß, dass man dann wieder im Anfangszustand ist, d. h. die Verkettung einer Geradenspiegelung mit sich ergibt die identische Abbildung (ich berechne nur die erste Spalte ...)

**Zuerst die Verkettung mit homogenen Koordinaten**

1. Spiegelung:  $\bar{x}^{*'} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}^*$

2. Spiegelung:  $\bar{x}^{**} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}^{*'}$

Verkettung:  $\bar{x}^{**} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}^*$

Nebenrechnung:  $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 1,2 \\ 0,8 & -0,6 & -2,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36+0,64 & 0 & 0 \\ 0,48-0,48 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis:  $\bar{x}^{**} = \bar{x}^*$

Ich zeige auf der nächsten Seite, wie kompliziert die Rechnung ist, wenn man die Gleichung mit dem Verschiebungsvektor verwendet.

**Dann die Verkettung mit kartesischen Koordinaten**

1. Spiegelung:  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

2. Spiegelung:  $\bar{x}'' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x}' + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

Verkettung:  $\bar{x}'' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

$$\bar{x}'' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0,36+0,64 & 0,48-0,48 \\ 0,48-0,48 & 0,64+0,36 \end{pmatrix}} \bar{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0,72-1,92 \\ 0,96+1,44 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ -2,4 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Ergebnis:  $\bar{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$  d. h.  $\bar{x}'' = \bar{x}$